

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЊИГА АПСТРАКТА

IX СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

Београд, 30. новембар и 1. децембар 2018.



Београд, новембар 2018.

КЊИГА АПСТРАКАТА – IX СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

30. новембар и 1. децембар 2018.

Издавач:

Универзитет у Београду
Математички факултет

За издавача:

проф. др Зоран Ракић, декан

Главни и одговорни уредник:

проф. др Миодраг Матељевић

Уредник:

доц. др Миљан Кнежевић

Припрема за штампу:

доц. др Миљан Кнежевић
доц. др Александра Делић
Марек Светлик
Ђорђе Стакић

Корице:

доц. др Миљан Кнежевић

Штампа:

Донат Граф, Београд

Тираж:

100 примерака

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд
51-7(048)
371.3::51(048)
СИМПОЗИЈУМ Математика и примене (9 ; 2018 ; Београд)
Књига апстраката / IX симпозијум "Математика и примене", 30. новембар и 1. децембар 2018. Београд ; [уредник Миљан Кнежевић]. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2018 (Београд : Донат Граф). - 30 стр. ; 30 cm
Апстракти на срп. и енгл. језику. - Текст ћир. и лат. - Тираж 100. - Библиографија уз поједине апстракте.

ISBN 978-86-7589-130-7

а) Математика - Апстракти б) Математика - Настава - Апстракти
COBISS.SR-ID 270891276

Програмски одбор IX Симпозијума „Математика и примене”

- **проф. др Миодраг Матељевић**, академик САНУ, редовни професор Математичког факултета, председник одбора,
- **проф. др Зоран Ракић**, декан Математичког факултета,
- **проф. др Александар Липковски**, редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Небојша Икодиновић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Зорица Станимировић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Мирослав Марић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **доц. др Драгана Илић**, доцент Математичког факултета,
- **доц. др Јелена Катић**, доцент Математичког факултета,
- **доц. др Миљан Кнежевић**, доцент Математичког факултета,
- **доц. др Марко Обрадовић**, доцент Математичког факултета

Организациони одбор IX Симпозијума „Математика и примене”

- **доц. др Миљан Кнежевић**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, председник одбора,
- **проф. др Зорица Станимировић**, ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Александра Делић**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Владимир Божин**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Марек Светлик**, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Ђорђе Стакић**, асистент Економског факултета Универзитета у Београду,
- **Сања Карапетровић**, менаџер за односе са јавношћу Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Давид Цвекић**, студент, Математички факултет Универзитета у Београду,



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕВЕТИ СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
НАЦИОНАЛНИ СКУП СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

Програм првог дана Симпозијума одржава се у свечаној сали Општине
Стари Град,
Македонска 42

Програм другог дана Симпозијума одржава се у просторијама
Математичког факултета,
Студентски трг 16

ПРОГРАМ

1. ДАН, ПЕТАК 30. НОВЕМБАР 2018.

10:00 – 16:00, Свечана сала Општине Стари Град

Председавајући: Миљан Кнежевић, Математички факултет, Универзитет у Београду

10:00 – 10:15
Отварање скупа: Зоран Ракић, декан Математичког факултета Универзитета у Београду
10:20 – 11:00
Миодраг Матељевић, Универзитет у Београду, Математички факултет, академик САНУ - Председник програмског одбора Симпозијума
„Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions”
11:05 – 11:45
Драгана Цветковић Илић, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу
„Recent results on some completion problems on operator matrices and its applications“

Пауза за кафу и освежење 11:45 – 12:15

12:15 – 12:45
Иља Гогих, Природно-математички факултет, Свеучилиште у Загребу
„On unital $C(X)$ -algebras and $C(X)$ -valued conditional expectations of finite index“
12:50 – 13:20
Петар Марковић, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
„Историја проблема коначне базе“
13:25 – 13:55
Горан Ђанковић, Математички факултет, Универзитет у Београду
„The Random Wave Conjecture for Eisenstein Series“

Пауза за кафу и освежење 13:55 – 14:20

14:20 – 14:50
Анђелка Ковачевић , Математички факултет, Универзитет у Београду Лука Ч. Поповић , Математички факултет, Универзитет у Београду; Астрономска опсерваторија, Београд Драгана Илић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Детекција периодичности у промењивости сјаја код активних галактичких језгара“
14:55 – 15:25
Зорица Станимировић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Vehicle Scheduling Problems: Mathematical Models, Solution Methods, and Applications“
15:30 – 16:00
Драгољуб Кечкић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Cauchy Schwartz inequality in Hilbert modules“

Коктел 16:00 – 17:00

2. ДАН, СУБОТА 1. ДЕЦЕМБАР 2018.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС 10:00 – 16:30 САТИ, САЛА БИМ/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Владимир Грујић, Математички факултет, Универзитет у Београду

10:00 – 10:30
Милош Арсеновић , Математички факултет, Универзитет у Београду „Атомичка декомпозиција у Бергмановим просторима више комплексних променљивих“
10:30 – 11:00
Данко Јоцић , Математички факултет, Универзитет у Београду „Cauchy-Schwartz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions, with applications“
11:00 – 11:30
Борислав Гајић , Математички институт САНУ, Београд Божидар Јовановић , Математички институт САНУ, Београд „Повезаности и замена времена у нехолономној механици и интеграбилност котрљања лопте по сфери“
11:30 – 12:00
Миодраг Матељевић , Математички факултет, Универзитет у Београду Марек Светлик , Математички факултет, Универзитет у Београду „The Schwarz lemma and hyperbolic metric on the strip“

ПАУЗА за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: Милош Арсеновић, Математички факултет, Универзитет у Београду

12:30 – 13:00
Маријан Марковић , Природно-математички факултет, Универзитет Црне Горе Петар Мелентијевић , Математички факултет, Универзитет у Београду „On Hollenbeck and Verbitsky conjecture and F. Riesz theorem“
13:00 – 13:30
Соња Телебаковић Онић , Математички факултет, Универзитет у Београду „1-dimensional Topological Quantum Field Theories and Brauerian Representation“
13:30 – 14:00
Ђорђе Баралић , Математички институт САНУ, Београд Александар Вучић , Математички факултет, Универзитет у Београду „Торусна лекција о додекаедру“

ПАУЗА за кафу и освежење 14:00 – 14:30

Трећи део: 14:30 – 16:30

Председавајући: Маријан Марковић, Faculty of Natural Sciences and Mathematics
University of Montenegro

14:30 – 15:00
Марија Цупарић , Математички факултет, Универзитет у Београду Бојана Милошевић , Математички факултет, Универзитет у Београду Марко Обрадовић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Нови начини за конструкцију постојаних тестова експоненцијалности“
15:00 – 15:30
Мирко С. Јовановић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
„Уопштење једног резултата Љ. Тирића“
15:30 – 16:00
Александра Костић , Математички факултет, Универзитет у Београду Нела Милошевић , Факултет за информационе системе и технологије Доња Горица, Подгорица, Црна Гора Зоран Петровић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Циклотомични полиноми, фундаменталне групе и Фоксов рачун“
16:00 – 16:30
Милица Јовалекић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
„Some generalizations of the Doob’s maximal inequalities“

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
10:00 – 15:50 САТИ, САЛА 704/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Зорица Станимировић, Математички факултет, Универзитет у Београду

10:00 – 10:30
Данијела Симић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Формализација комплексне геометрије“
10:30 – 11:00
Милица Вучетић , Математички факултет, Универзитет у Београду Драгана Илић , Математички факултет, Универзитет у Београду Олег Егоров , Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Russia Алексеј Мојсејев , Special Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences, Russia Бојан Арбутина , Математички факултет, Универзитет у Београду Душан Онић , Математички факултет, Универзитет у Београду Дејан Урошевић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Емисионе маглине у патуљастој елиптичној галаксији NGC 185“
11:00 – 11:30
Бранко Малешевић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду Татјана Лутовац , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду Бојан Бањац , Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
„Аутоматско доказивање неких класа аналитичких неједнакости базирано на Тејлоровим апроксимацијама“
11:30 – 12:00
Оливера Станчић , Економски факултет Универзитета у Крагујевцу
„Проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са једноструким алокацијама“

ПАУЗА за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: Марко Обрадовић, Математички факултет, Универзитет у Београду

12:30 – 13:00
Милош Јордански , Математички факултет, Универзитет у Београду
Мирослав Марић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Примена машинског учења за детекцију фузије гена“
13:00 – 13:30
Лазар Мркела , Универзитет Метрополитан, Београд
Зорица Станимировић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Метахеуристички приступ решавању локацијског проблема максималног покривања са преференцијама корисника“
13:30 – 14:00
Бранко Малешевић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
Бојан Бањац , Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Данијела Бранковић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
Ивана Јововић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
„Рачунарски поступци у заснивању диференцијалних оператора у тродимензионалном и четвородимензионалном случају“

ПАУЗА за кафу и освежење 14:00 – 14:30

Трећи део: 14:30 – 16:35

Председавајући: Виктор Радовић, Математички факултет, Универзитет у Београду

14:30 – 14:55
Александар Јовић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Theorems of the alternative in mathematical programming“
14:55 – 15:20
Ивана Милић Житник , Астрономска опсерваторија, Београд
„Специфична особина кретања резонантних астероида са веома малим брзинама Јарковског“
15:20 – 15:45
Елвир Чајић , Гимназија Мостар, Босна и Херцеговина
„Кориштење теорије екстрема за процјену тржишног ризика“
15:45 – 16:10
Милица Миливојевић – Данас , Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Зоран Максимовић , Универзитет одбране, Београд
Александар Савић , Математички факултет, Универзитет у Београду
Јозеф Кратица , Математички институт САНУ, Београд
„Оптимална функција $\{k\}$ -паковања за графове цветних латица“
16:10-16:35
Јелена Станојевић , Економски факултет, Универзитет у Београду
Катарина Кукић , Саобраћајни факултет, Универзитет у Београду
Немања Вуксановић , Економски факултет, Универзитет у Београду
„Примена нелинеарних динамичких модела у економији са анализом података о цени пшенице“

II СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА У ОБРАЗОВАЊУ

10:00 – 17:00 САТИ, САЛА 706/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: **Мирослав Марић**, Математички факултет, Универзитет у Београду

10:00 – 11:00
Миодраг Матељевић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„О конвексности - неједнакости и визуелизација“
11:00 – 11:30
Војислав Андрић , Ваљевска гимназија, Ваљево
„Геометријске неједнакости Михаила Петровића“
11:30 – 12:00
Александар Липковски , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Алгебарске једначине и Њутнов полигон“

ПАУЗА за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: **Нина Радојичић**, Математички факултет, Универзитет у Београду

12:30 – 12:55
Владимир Кузмановић , Математички факултет, Универзитет у Београду
Оливер Петковић , Основна школа „4. октобар“, Глогоњ
Мирослав Марић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Дигиталне компетенције и наставни материјали за ново доба“
12:55 – 13:20
Владимир Балтић , ВИШЕР, Математичка гимназија, Београд
„Решавање система линеарних једначина (осврт на честе грешке и неки трикови)“
13:20 – 13:40
Милан Живановић , Висока школа струковних студија за васпитаче, Крушевац
„Конструкција прстена примитивних Питагориних тројки“
13:40 – 14:00
Миљан Кнежевић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Михаило Петровић Алас и комплексни бројеви“

ПАУЗА за кафу и освежење 14:00 – 14:30

Трећи део: 14:30 – 15:45

Председавајући: Марек Светлик, Математички факултет, Универзитет у Београду

14:30 – 14:45
Радослав Божић , Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
„Употреба динамичког софтвера код испитивања функција са параметрима“
14:45 – 15:00
Јасна Маричић Мириловић , Основна школа „Јелица Миловановић“, Сопот
„Индивидуални образовни план: потреба и пракса“
15:00 – 15:15
Снежана Тошовић , Основна школа „Танаско Рајић“, Чачак
Снежана Милутиновић , Основна школа „Владислав Петковић Дис“, Заблаће
„Математичке новине као пројектни задатак у свету предузетника“
15:15 – 15:30
Милан Живановић , Висока школа струковних студија за васпитаче, Крушевац
„Независност ловаца на шаховској табли“
15:30 – 15:45
Мирјана Кокерић , Основна школа „Бранко Радичевић“, Смедерево
Синиша Ђулафић , Основна школа „Миша Стојковић“, Гај
„Подршка ученику кроз индивидуализацију и пројектни рад у настави математике“

ПАУЗА за освежење 15:45 – 16:00

Четврти део: 16:00 – 17:00

16:00 – 17:00
Нивес Барановић , Филозофски факултет у Сплиту, Свеучилиште у Сплиту
„Математика у сликама (радионица)“

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

10:00 – 15:30 САТИ, САЛА 718

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: **Јелена Тасић**, Математички факултет, Универзитет у Београду

10:00 – 10:20
Владимир Зековић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Non-linear Resonant Wave-plasma Interactions at Collisionless Shock“
10:20 – 10:40
Немања Мићовић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Визуелно препознавање и генерисање рачунарских фонтова“
10:40 – 11:00
Бојана Милошевић , Математички факултет, Универзитет у Београду
Марија Минић , Фармацеутски факултет, Универзитет у Београду
Марко Обрадовић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Тестови сагласности са степеном расподелом који користе Пури-Рубин карактеризацију засновани на узорку ранжираних скупова“
11:00 – 11:20
Душан Милосављевић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Метода променљивих околина за решавање проблема континуалне оптимизације“
11:20 – 11:40
Кристина Костић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Метахеуристички приступ решавању проблема р-медијане са равнотежним ограничењима“
11:40 – 12:00
Срђан Стефановић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Дуалност за укрштени производ фон Нојманове алгебре“

ПАУЗА за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 13:30

Председавајући: **Давид Цвекић**, Математички факултет, Универзитет у Београду

12:30 – 12:50
Катарина Халај , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Оптимизација портфолија заснована на вредности при ризику“
12:50 – 13:10
Матеја Илић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
Милош Ненадовић , Електротехнички факултет, Универзитет у Београду
„Бојење и провера планарности графова“
13:10 – 13:30
Катарина Живковић , Математички факултет, Универзитет у Београду
„Шарл Ермит и математичке константе π и e “

Atomic decompositions in weighted Bergman spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains

Miloš Arsenović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs

Abstract. We construct an atomic decompositions in weighted Bergman spaces $A_\alpha^p(D)$ of analytic functions on a strictly pseudoconvex domain $D \subset \mathbb{C}^n$ with smooth boundary. The atoms used are atoms in the real-variable sense.

Supported by Ministry of Science, Serbia, project OI174017

Mathematics Subject Classification 2010 Primary 30D45.

Keywords: Bergman spaces, pseudoconvex domains, atomic decomposition.

Some generalizations of the Doob's maximal inequalities

Milica Jovalekić

University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering, Bulevar kralja Aleksandra 73, Belgrade, Serbia
e-mail: milica@etf.rs

Abstract. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. If X is a random variable, then the expectation of X is denoted by $\mathbb{E}(X)$ with respect to the probability \mathbb{P} . Also, for $0 < p < \infty$, we denote

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} = \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Let M be a maximum and let N be a minimum of the non-negative martingale $(X_1, \mathcal{F}_1), (X_2, \mathcal{F}_2), \dots, (X_n, \mathcal{F}_n)$. It is well known, that if $X_1 = 1$, then

$$\gamma(\|M\|_1) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n) \quad \text{and} \quad \gamma(\|N\|_1) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

where $\gamma(x) = x - 1 - \log x$, for all $x > 0$. This can be seen as a strengthening of a classical maximal inequality by Doob. We prove the analogue of this result in the case when $1 < p < \infty$, by proving that

$$\delta_p(\|M\|_p^p) \leq \|X_n\|_p \quad \text{and} \quad \delta_p(\|N\|_p^p) \leq \|X_n\|_p,$$

where $\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$, for all $x > 0$. Also, we find that

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\mathbb{E}(M^p)^{\frac{1}{p}} \leq \delta_p(\mathbb{E}(M^p)) \leq \mathbb{E}(X_n^p)^{\frac{1}{p}},$$

which can be seen as a variant of the classical Doob's L^p maximal inequality.

Keywords: Doob's inequalities; Maximal inequalities; Martingales.

References

- [1] P. Harremoës. Some new maximal inequalities. *Stat. Prob. Lett.*, 2008, 78, 2776 - 2780.

- [2] **M. Jovalekić.** Some estimates related to the Doob's martingale inequalities (*submitted for publication*).
[3] **D. W. Stroock.** Mathematics of Probability. *Graduate Studies in Mathematics, Volume 149, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2013.*

Cauchy Schwartz inequality in Hilbert modules

Dragoljub J. Kečkić

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: keckic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. We apply the inequality $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \langle y, y \rangle^{1/2}$ to give an easy and elementary proof of many operator inequalities for elementary operators and inner type product integral transformers obtained during last two decades, which also generalizes all of them.

Keywords: Cauchy Schwartz inequality, unitarily invariant norm, elementary operator, inner product type transformers.

References

- [1] **Dragoljub J. Kečkić.** The applications of Cauchy-Schwartz inequality for Hilbert modules to elementary operators and i.p.t.i. transformers. *preprint*, arXiv:1801.07953

Дигиталне компетенције и наставни материјали за ново доба

Владимир Кузмановић

*Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: vladimir_kuzmanovic@matf.bg.ac.rs*

Оливер Петковић

*Основна школа "4. Октобар", Глогољ
e-mail: oliver.petkovic@gmail.com*

Мирослав Марић

*Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs*

>

Апстракт. Имајући у виду Оквир дигиталних компетенција - наставник за ново доба који је објавило Министарство просвете, науке и технолошког развоја, очекује се јачање дигиталних компетенција наставника за израду квалитетних наставних материјала. Развојем интернета и његовом све већом улогом у наставном процесу, квалитетан наставни материјал подразумева мултимедијалне садржаје и балансирану, промишљену и ефикасну употребу информационо-комуникационих технологија (скр. ИКТ) приликом његовог креирања. Циљ овог рада је да предложи конкретне методе којима се могу повећати дигиталне компетенција наставника као и да нагласи значај употребе ИКТ-а коришћењем разних доступних алата, примене тих алата у изради наставних материјала и њиховим укључивањем у наставни процес. Акцент ће бити на дигиталном описмењавању наставника да би се стекло неопходно искуство у ефикасном решавању задатака коришћењем ИКТ алата као и на усвајању одговарајућих концепата, образаца размишљања и начина резонувања. Такође, циљ овог рада је и умањивање негативних ставова наставника и отпора који имају према новинама и променама демонстрацијом да употреба ИКТ-а у настави може да допринесе ефикаснијем, лакшем и интересантнијем наставном процесу.

Кључне речи: Дигиталне компетенције; Дигитална писменост; Наставни материјали;

Повезаности и замена времена у нехолономној механици и интеграбилност котрљања лопте по сфери

Борислав Гајић

*Математички институт САНУ, Кнез Михаилова 36, Београд
e-mail: gajab@mi.sanu.ac.rs*

Божидар Јовановић

*Математички институт САНУ, Кнез Михаилова 36, Београд
e-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs*

Апстракт. Разматра се замена времена код Њутнових једначина на Римановим многострукостима која представља модификацију метода Чаплигиновог множиоца. Као пример посматра се редукован проблем котрљања без клизања вишедимензионе гумене лопте по фиксираној сфери. За специјалан избор оператора инерције доказана је потпуна интеграбилност у случају када је полупречник лопте два пута већи од полупречника сфере.

Кључне речи: повезаности у нехолономној механици; Чаплигинови системи; замена времена; интеграбилност

Библиографија

- [1] **B. Gajić, B. Jovanović** Nonholonomic Connections, Time Reparametrizations, and Integrability of the Rolling Ball Over a Sphere. *arXiv:1805.10610 [math-ph]*, 2018.

The Random Wave Conjecture for Eisenstein Series

Goran Đanković

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: djankovic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. A very interesting and deep conjecture in arithmetic quantum chaos is the random wave conjecture of Berry from 1977 and Hejhal and Rackner from 1992. For the full modular group, the conjecture says that in some sense, the Hecke Maass automorphic forms should behave like random waves, in the limit of large Laplacian eigenvalue. This can be formulated more precisely by proposing that on fixed compact regular sets, the moments of Hecke Maass forms of large eigenvalue, suitably normalized, should asymptotically equal the moments of a standard normal random variable.

We will describe a new asymptotic formula for the regularized fourth moment of the Eisenstein series for the full modular group, which is in agreement with the Random Wave Conjecture. This is based on a joint work with Rizwanur Khan, University of Mississippi, USA.

Keywords: Random Wave Conjecture; Arithmetic Quantum Chaos; L-functions.

References

- [1] **G. Đanković, R. Khan.** On the Random Wave Conjecture for Eisenstein Series. *International Mathematics Research Notices*, to appear.
[2] **G. Đanković, R. Khan.** A conjecture for the regularized fourth moment of Eisenstein series, *J. Number Theory* 182 (2018), 236-257.

Торусна лекција о додекаедру

Ђорђе Баралић

*Математички институт САНУ, Београд
e-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs*

Александар Вучић

*Математички факултет, Београд
e-mail: sasavucic2@gmail.com*

Апстракт. Икосаедар и додекаедар су дуална Платонова тела са групом симетрије A_5 . Доказаћемо да постоје два неизоморфна регуларна бојења пљосни додекаедра у четири боје, који на канонски начин генеришу две квазиторусне многострукости чије ћемо кохомолошке прстене описати. Користећи Хоштерову формулу и резултат Баскакова описаћемо и множење у кохомологији момент-угао комплекса над икосаедром. Ови су резултати део заједничког рада са Јеленом Грбићи Иваном Лимонченком.

Кључне речи: додекаедар; икосаедар; момент-угао комплекс, квазиторусне многострукости.

References

- [1] **V. Buchstaber, T. Panov.** *Torus Actions and their applications in topology and combinatorics*, AMS University Lecture Series, 24, (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002).
- [2] **V. Buchstaber, T. Panov.** *Toric Topology*, AMS Math. Surveys Monogr. **204** (2015)

Алгебарске једначине и Њутнов полигон

Александар Липковски

*Математички факултет Универзитета у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: acal@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Шта је заједничко Њутну, Пизоу, Мики Аласу и Владимиру Арнољду? Одговору на то питање биће посвећено ово предавање. Слушаоци ће сазнати о вези једначина (алгебарских, диференцијалних или интеграла) са комбинаторном геометријом мреже целобројних тачака у равни.

Šarl Ermit i matematičke konstante π i e

Katarina D. Živković

*Matematički fakultet, Studentski trg 16
e-mail: katarinazivkovic95@gmail.com*

Apstrakt. Brojevi π i e intrigirali su matematičare od postanka matematike pa sve do današnjih dana. Tajanstvenost ovih brojeva kojih možemo naći u skoro svim oblastima matematike privukla je i jednog od najznačajnijih francuskih matematičara devetnaestog veka Šarla Emita. On je 1873. godine prvi dokazao transcendentnost broja e , čijim metodama je kasnije dokazano da je π transcendentan broj, dok je iracionalnost broja π prvi dokazao Lambert 1761. godine da bi stotinak godina kasnije Ermit

pronašao dokaz koji ne zahteva preduslov znanja izvan osnovne matematike. Ermit je više od četvrt veka predavao na Sorboni gde je podigao celu plejadu izvanrednih matematičara među kojima je i naš poznati matematičar Mihailo Petrović Alas. U radu je data životna i radna biografija Šarl Ermita i prezentovani su njegovi dokazi transcendentnosti broja e i iracionalnosti broja π .

Ključne reči: Broj e ; Broj π ; Šarl Ermit; Istorija matematike.

Theorems of the alternative in mathematical programming

Aleksandar Jović

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: ajovic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. In the theory of extremal problems, theorems of alternative play an important role in deriving solvability conditions for the system of inequalities or equalities. A typical theorem of the alternative asserts that either system I has a solution, or that system II has a solution, but never both. Some famous theorems for the systems of linear and convex inequalities are considered. The mentioned theorems have a generalization in functional spaces. They are crucial in deriving optimality conditions for wide classes of extremal problems in optimal control theory. Unfortunately, some of the main results from literature, regarding optimality conditions are incorrect, as shown in this paper.

Primena mašinskog učenja za detekciju fuzije gena

Miloš Jordanski

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16/IV, 11 000 Belgrade, Serbia
e-mail: milos.jordanski@gmail.com*

Miroslav Marić

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16/IV, 11 000 Belgrade, Serbia
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Postojeće metode za detekciju fuzije gena često su neefikasne i nedovoljno tačne, s nedovoljnom preciznošću ili odzivom. Fuzije gena, nastale kao rezultat hromozomske aberacije, često se koriste u dijagnostici raka. Predstavljen je novi algoritam SPORK (Small Powerful Orthogonal Read Mapper from KNIFE) za detekciju fuzije gena na osnovu RNK (ribonukleinska kiselina) podataka, koji postiže dobru i preciznost i odziv. Analiza eksperimentalnih rezultata na sintetičkim i javno dostupnim RNK podacima dobijenim uparenim sekvenciranjem (RNA-Seq paired-end data), pokazuje da je tačnost SPORK algoritma značajno bolja od ostalih popularnih metoda za detekciju fuzije gena. Rezultati pokazuju prednost primene mašinskog učenja pri detekciji fuzije gena kao i da je nepristrasna detekcija fuzije gena moguća. Opisan je i način na koji je algoritam optimizovan kako bi se efikasno izvršavao na podacima hiljade pacijenata u oblaku (cloud computing).

Ključne reči: mašinsko učenje, bioinformatika, fuzija gena

Детекција периодичности у променљивости сјаја код активних галактичких језгара

Анђелка Ковачевић

*Katedra za astronomiju, Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu
Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: andjelka@matf.bg.ac.rs*

Лука Ђ. Поповић

*Katedra za astronomiju, Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu
Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija
Astronomska opservatorija
Volgina 7, 11060 Beograd, Srbija
e-mail: lpopovic@aob.rs*

Драгана Илић

*Katedra za astronomiju, Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu
Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: dilic@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Велики број објеката у Васиони, а пре свега извори у чијој позадини стоји акреција, показују изражену и случајну променљивост сјаја. Случајна природа променљивости сјаја извора скрива и отежава детекцију могућих слабих периодичних сигнала. Активна галактичка језгра (AGJ) су управо најмоћнији извори овог типа, чија периодичност може да укаже, поред осталог, на постојање двојних система црних рупа, а тиме и маркирати (означити) могући извори гравитационих таласа. Из тога разлога је у савременој астрофизици потребно развити алате за детекцију периодичних променљивости у емисији AGJ. У овом раду ћемо представити један нови метод [1], који смо развили у сврху проналажења периодичности у сјају AGJ, а који се може применити и у случају да је периодичност у промени сјаја AGJ покривена и другим, аperiodичним, променама. Даћемо најзанимљивије резултате до којих смо дошли, али ћемо назначити и неке изазове са којима се сусрећемо у овој области.

Кључне речи: Активне галаксије; метод; анализа података.

Библиографија

- [1] **A. B. Kovačević, E. Pérez-Hernández, L. Ć. Popović, A. I. Shapovalova, W. Kollatschny, D. Ilić,** Oscillatory patterns in the light curves of five long-term monitored type 1 active galactic nuclei. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2018, 475, Issue 2, 2051 - 2066.

Историја проблема коначне базе

Петар Марковић

*Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
e-mail: pera@dmf.uns.ac.rs*

Апстракт. Проблем коначне базе идентитета се изучава од 1930-тих. Тада је Бернард Нојман поставио следећи проблем: Ако је G коначна група, да ли су сви идентитети који важе у G логичка последица коначно много таквих идентитета. То је једна особина логичке компактности коју зовемо коначном базом идентитета. Нојманово питање је решено (свака коначна група има коначну базу идентитета), али су се повезани проблеми уткали у скоро све периоде у развоју Универзалне алгебре. Дајемо кратак преглед историје тих проблема и метода коришћених за њихово решавање, са описом тренутног знања на те теме.

Automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti bazirano na Tejlorovim aproksimacijama

Branko Malešević

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija
e-mail: branko.malesevic@etf.bg.ac.rs*

Tatjana Lutovac

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija
e-mail: tatjana.lutovac@etf.bg.ac.rs*

Bojan Banjac

*Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad, Srbija
e-mail: bojan.banjac@uns.ac.rs*

Apstrakt. U ovom radu predstavljene su određene metode za automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti, bazirane na Tejlorovim aproksimacijama. Biće prikazan sistem za automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti koji je razvijen kao računarski sistem za dokazivanje miksovano trigonometrijskih nejednakosti i nekih klasa nejednakosti koje se svode na navedenu klasu. Takođe će biti prikazani uporedni rezultati u dokazivanju nekih konkretnih nejednakosti primenom ovog sistema i postojećih sistema za dokazivanje poput sistema Metitarski.

Ključne reči: Sistem za automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti, miksovano trigonometrijske nejednakosti

Bibliografija

- [1] G. Milovanović, M. Rassias (ed.), Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions, Springer 2014.
- [2] B. Banjac, M. Nenezić, B. Malešević, Some applications of Lambda-method for obtaining approximations in filter design, Proceedings of 23-rd TELFOR conference, pp. 404–406, Beograd 2015.
- [3] B. Malešević, M. Makragić, A Method for Proving Some Inequalities on Mixed Trigonometric Polynomial Functions, J. Math. Inequal. 10:3 (2016), 849–876.
- [4] M. Nenezić, B. Malešević, C. Mortici, New approximations of some expressions involving trigonometric functions, Appl. Math. Comput. 283 (2016), 299–315.
- [5] B. Banjac, M. Makragić, B. Malešević Some notes on a method for proving inequalities by computer, Results Math. 69:1 (2016), 161–176.
- [6] B. Malešević, I. Jovović, B. Banjac, A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions, J. Math. Inequal. 11 (1) (2017), 151–162.
- [7] T. Lutovac, B. Malešević, C. Mortici, The natural algorithmic approach of mixed trigonometric-polynomial problems, J. Inequal. Appl. 2017:116 (2017), 1–16.
- [8] B. Malešević, T. Lutovac, B. Banjac, A proof of an open problem of Yusuke Nishizawa for a power-exponential function, J. Math. Inequal. 12:2 (2018), 473–485.
- [9] B. Malešević, M. Rašajski, T. Lutovac, Double-sided Taylor's approximations and their applications in Theory of analytic inequalities, preprint arXiv.org
- [10] B. Malešević, T. Lutovac, B. Banjac, One method for proving some classes of exponential analytical inequalities, Accepted in Filomat ACTA 2017 - Special issue

Vizuelno prepoznavanje i generisanje računarskih fontova

Nemanja Mićović

Математички факултет, Студентски Трг 16
e-mail: nemanja_micovic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Vizuelno prepoznavanje i generisanje fontova su problemi koji se javljaju u oblastima tipografije i grafičkog dizajna. Vizuelno prepoznavanje fontova (eng. *visual font recognition* - VFR) je problem u kojem je potrebno na slici odrediti font kojim je napisan tekst koji slika sadrži. Potreba za ovim je česta u praktičnim primenama jer postoji dosta raznih primera grafičkog dizajna koji dizajneru mogu biti inspiracija pri odabiru fonta. Rad opisuje predloženo rešenje zasnovano na konvolutivnim neuronskim mrežama za varijantu problema VFR koje ostvaruje preciznost 0.993 na skupu podataka za testiranje i navodi njegova potencijalna poboljšanja i dalji razvoj.

Vizuelno generisanje fontova (eng. *visual font generation* - VFG) je problem gde je potrebno generisati jedan ili više simbola za određeni font, u rasterskom ili vektorskom obliku. Rad razmatra jedan model rešenja zasnovan na konvolutivnom variacionom autoenkoderu, razmatra njegove performanse i predlaže dalja poboljšanja i razvoj. Razvijeni sistem za generisanje je ipak daleko od upotrebe u praksi usled nemogućnosti da se generiše više simbola u istom stilu.

Primena oblasti dubokog učenja na probleme prisutne u tipografiji se pokazuje kao pristup koji donosi dobre rezultate i otvara dosta prostora za dalja istraživanja.

Кључне речи: duboko učenje; neuronske mreže; računarski fontovi; tipografija; dizajn.

Bibliografija

- [1] Z. Wang, J. Yang, H. Jin, J. Brandt, E. Shechtman, A. Agarwala, Z. Wang, Y. Song, J. Hsieh, S. Kong, T. Huang Deepfont: A system for font recognition and similarity. *Machine learning*, 2015.
- [2] S. Baluja Learning typographic style. *Machine learning*, 2017
- [3] I. Goodfellow, Y. Bengio. Deep Learning. *MIT Press*, 2016.

Формализација комплексне геометрије

Данијела Симић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: danijela@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У овом раду формално посматрамо геометрију комплексних бројева и представљамо потпуно механички верификовану теорију у оквиру асистента за доказивање теорема. Резултат је добро развијена теорија проширене комплексне равни (дате као комплексна пројективна права, али и као Риманова сфера), њених објеката (кругови и праве) и њених трансформација (на пример, инверзија или Мебијусове трансформације). Формализована је тетивна метрика у проширеној комплексној равни, специјалне подгрупе Мебијусових трансформација (еуклидске сличности, ротације сфере, аутоморфизми диска), кругоправе и њихова веза са круговима и правима, тетивном метриком и Римановом сфером, дејство Мебијусових трансформација на кругоправе, оријентисане кругоправе, однос између Мебијусових трансформација и оријентације, својство очувања угла након дејства Мебијусових трансформација итд. Намећу се два приступа формализацији: геометријски и алгебарски и у оквиру рада су упоређена оба приступа и дискутује се о главним предностима алгебарски оријентисаних доказа. Ова формализација може да служи као веома важан блок за изградњу будућих формалних модела различитих геометрија (нпр, Поинкареов диск модел хиперболичке геометрије).

Кључне речи: 3-5 речи; 2реч; 3реч.

Дуалност за укрштени производ фон Нојманове алгебре

Срђан Стефановић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: srdjan_stefanovic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Фон Нојманове алгебре су једна од најзначајних области истраживања у оквиру теорије оператора. Своју експанзију доживеле су седамдесетих година прошлог века у радовима чији су аутори М. Takesaki, U. Haagerup, A. Van Daele, A. Connes и други. У излагању ће бити уведени сви потребни појмови и описана конструкција укршеног производа фон Нојманове алгебре \mathcal{M} и локално компактне Абелове групе G . Доказаћемо да је укрштени производ $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \widehat{G}$ изоморфан тензорском производу $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$. Овај резултат имао је битну улогу у класификацији фактора типа III, за коју је, између осталог, Alain Connes 1982. добио Филдсову медаљу.

Кључне речи: фон Нојманове алгебре; локално компактне Абелове групе; укрштени производ; тензорски производ

Библиографија

- [1] **M. Takesaki.** Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III. *Acta Mathematica*, 1973, 131, 249 - 310.
- [2] **A. Van Daele.** Continuous Crossed Products and Type III von Neumann Algebras. *Lecture Notes Series. London Mathematical Society*, 1978.
- [3] **S. Stefanović.** Harmonijska analiza na lokalno kompaktnim Abelovim grupama i primene u operatorskim algebrama, master rad, *Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu*, 2018.

1-dimensional Topological Quantum Field Theories and Brauerian Representation

Sonja Telebaković Onić

Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: sonjat@matf.bg.ac.rs

Abstract. In this talk we show that every 1-dimensional topological quantum field theory, regarded as a symmetric monoidal functor between the category of 1-cobordisms and the category of matrices, coincides with the Brauerian representation up to multiplication by invertible matrices. Since the Brauerian functor is faithful, we extend our faithfulness result to all 1-dimensional topological quantum field theories. This means that different 1-cobordisms correspond with distinct matrices.

Keywords: Brauerian representation; cobordism; topological quantum field theory; symmetric monoidal category; oriented manifold.

Математичке новине као проектни задатак у свету предузетника

Snežana Tošović

*OŠ "Tanasko Rajić", Čačak
e-mail: snezana.matematika@gmail.com*

Snježana Milutinović

*OŠ "Vladislav Petković Dis", Zablaće
e-mail: snjeza.milutinovic@gmail.com*

Apstrakt. Svrha programa obrazovanja je razvijanje znanja, stavova, veština i vrednosti koje osposobljavaju učenika da uspešno zadovoljava svoje unutrašnje potrebe i često skrivene mogućnosti, razvija sopstvenu ličnost i potencijale. Nastava matematike ima za cilj da osposobi učenika da rešava problem u novim nepoznatim situacijama, da učenik obrazloži svoje mišljenje, razvije motivisanost za učenje i zainteresovanost za predmetne sadržaje, osposobi učenika za primenu usvojenih matematičkih znanja u svakodnevnom životu. Sve navedeno se može realizovati kroz vannastavnu aktivnost kreiranja i realizacije matematičkih novina u vidu projektne nastave. Taj proces je kreativan i stvaralački, a učenik je aktivan u razvijanju svojih ме-upredmetnih kompetencija. Preduzetničke kompetencije koje se steknu su korisne za rešavanje raznovrsnih zadataka iz životne prakse. Takve novine su odlično sredstvo za svestrani razvitak ličnosti učenika.

Ključne reči: matematičke novine; preduzetničko učenje; projektna nastava; ме-upredmetne kompetencije.

References

- [1] **J. Čekić-Marković.** Preduzetničko obrazovanje - komparativni pregled obrazovnih politika, modela i prakse, Tim za socijalno uključivanje i smanjenje siromaštva, Vlada Republike Srbije
- [2] **Pravilnik o nacionalnom okviru obrazovanja i vaspitanja**

Recent results on some completion problems on operator matrices and its applications

Dragana Cvetković Ilić

*Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, Serbia
e-mail: dragana@pmf.ni.ac.rs*

Abstract. We will discuss certain results addressing some completion problems on operator matrices as well as their application to the questions such as that of existence of a linear bounded operator X for which $A+CX$ is of a certain type, when A and C are given bounded linear operators, properties of the sum of operators and reverse order laws for the operators.

On unital $C(X)$ -algebras and $C(X)$ -valued conditional expectations of finite index

Ија Годић

PMF, Univerzitet u Zagrebu, Bijenička cesta 30, Zagreb
e-mail: ilja@math.hr

Abstract. Let A be a unital $C(X)$ -algebra, where X is a compact Hausdorff space. We consider the problem of characterizing the existence of conditional expectation from A onto $C(X)$ of finite index in terms of the associated C^* -bundle of A over X . This is a joint work with Etienne Blanchard (Paris).

Бојење и провера планарности графова

Матеја Илић

Електротехнички факултет у Београду
e-mail: mateja98.ilic@gmail.com

Милош Ненадовић

Електротехнички факултет у Београду
e-mail: neosmilos@gmail.com

Апстракт. Још од 18. века када се први пут појавио проблем обојивости графа, па до данас је наишао на мноштво алгоритама по којима се може решити. Још један сличан проблем је питање планарности графа. Иако различите, ове две теме су нашле заједничко тле у алгоритму за бојење који захтева познавање планарности графа. Наравно, различита ршења ових проблема су се јавила током година, али се ипак и даље усавршавају како би била што применљивија и како би могла да се искористе на све сложенијим графовима. Један такав алгоритам ћемо презентовати у овом раду. Искористили смо претходно доказане теореме које ћемо ради комплетности навести. Овим смо спојили у једном програму проверу планарности и бојење графа. Ову имплементацију смо одрадили у програмском језику *Java* и притом одредили сложеност како бисмо упоредили овај алгоритам са другим познатим алгоритмима који се баве истом тематиком.

Кључне речи: алгоритам; граф; бојење; планарност.

Библиографија

- [1] **Min Jae Song** EULER'S FORMULA AND THE FIVE COLOR THEOREM
- [2] **N. Chiba, T. Nishizeki and N. Saito** A linear algorithm for five-coloring a planar graph
- [3] **Georges Gonthier** Formal Proof - The Four-Color Theorem
- [4] **G.C.Armour and E.S.Buffa.** A heuristic algorithm and simulation approach to relative location of facilities. *Management Science*, 1963, 9, 294–304.
- [5] **Robin Thomas** An Update on the Four-Color Theorem
- [6] **Hubert De Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez, Pierre Rosenstiehl** Tremaux trees and planarity. *International Journal of Foundations of Computer Science*, World Scientific Publishing, 2006, 17 (5), pp.1017-1029. <10.1142/S0129054106004248>. <hal-00097836>

Individualni obrazovni plan: potreba i praksa

Jasna Maričić Mirilović

OŠ "Jelica Milovanović", Sopot
e-mail: jasna.maricic@gmail.com

Apstrakt. U proteklim godinama iza nas je implementacija inkluzije u školstvo. Ova tema je veoma široka, društveno angažovana i aktuelna, a među prosvetnim radnicima za nju postoji mnoštvo motiva za analizu i razgovor o istoj.

U poredo sa inkluzijom, uvedeni su individualni obrazovni planovi (IOP-i), kako za decu koja ne mogu u potpunosti da prate predviđen plan i program nastave, tako i za one koji ga sa lakoćom savladavaju i imaju inerciju u svojoj radoznalosti.

Najviše IOP-a pada na teret nastavnica predmeta sa najšire postavljenim ciljevima nastave: nastavnica srpskog jezika i matematike.

Tema ovog rada je potreba za IOP-ima u redovnom školstvu i njihovo sprovođenje u praksi. Razrada teme je planirana kroz zakonski okvir, prikaze nekih stručnih uputstava i radova kroz prizmu iskustva praktičara - matematičara.

Ključne reči: individualni obrazovni plan, individualizacija, IOP, nastava matematike.

Bibliografija

- [1] **Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja.** Pravilnik o bližim uputstvima za utvrđivanje prava na individualni obrazovni plan, njegovu primenu i vrednovanje. *Službeni glasnik*, br. 88/17 i 27/18.
- [2] **Zavod za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja.** Programi podrške deci i učenicima sa smetnjama u razvoju. *ZUOV*, Beograd, 2016.
- [3] **T. Booth, M. Ainscow.** Index for Inclusion: developing learning and participation in schools. *Centre for studies on Inclusive Education*, Bristol, United Kingdom, 2002.
- [4] **Z. Vajagić.** Rad s matematički nadarenim učenicima u osnovnim školama. *Diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Hrvatska*, 2014.

Cauchy-Schwartz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions, with applications

Danko R. Jocić

University of Belgrade - Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, P.O. Box 550, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: jocic@matf.bg.ac.rs

Abstract. For μ -weakly*-measurable families $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \Omega}$ and $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in \Omega}$ of bounded Hilbert space operators there holds the following non-commutative Cauchy-Schwarz inequalities in Schatten p -ideals

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}X\mathcal{B}d\mu \right\|_p \leq \left\| \sqrt[2q]{\int_{\Omega} \mathcal{A}^* \left(\int_{\Omega} \mathcal{A}\mathcal{A}^*d\mu \right)^{q-1} \mathcal{A}d\mu X} \sqrt[2r]{\int_{\Omega} \mathcal{B} \left(\int_{\Omega} \mathcal{B}^*\mathcal{B}d\mu \right)^{r-1} \mathcal{B}^*d\mu} \right\|_p,$$

for all $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ and for all $p, q, r \geq 1$ such that $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{2}{p}$. If both $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \Omega}$ and $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in \Omega}$ consist of commuting normal operators, then

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}X\mathcal{B}d\mu \right\| \leq \left\| \sqrt{\int_{\Omega} \mathcal{A}^*\mathcal{A}d\mu} X \sqrt{\int_{\Omega} \mathcal{B}^*\mathcal{B}d\mu} \right\|$$

for all unitarily invariant norms $\|\cdot\|$ and all $X \in \mathfrak{C}_{\|\cdot\|}(\mathcal{H})$.

Keywords: singular values; Schatten classes; three line theorem for operators.

Specifična osobina kretanja rezonantnih asteroida sa veoma malim brzinama Jarkovskog

Ivana Milić Žitnik

Astronomska opservatorija, Volgina 7, 11000 Beograd, Srbija

e-mail: ivana@aob.rs

Apstrakt.

Gravitacioni i negravitacioni fenomeni utiču na dinamiku asteroida u Glavnom asteroidnom pojasu (GAP). Najznačajniji gravitacioni mehanizmi su rezonance u srednjem kretanju (RSK) koje mogu da ubrzaju ili uspore orbitalne promene, dok je efekat Jarkovskog najznačajnija negravitaciona sila. Nova sveobuhvatna istraživanja o interakciji između efekta Jarkovskog i RSK i njenom uticaju na kretanje asteroida u GAP-u su predstavljena u Milić Žitnik i Novaković (2016) i Milić Žitnik (2016). Na ovom predavanju će biti predstavljena specifična osobina kretanja asteroida sa veoma malim brzinama Jarkovskog (da/dt) preko RSK 2-tela sa Jupiterom čije snage pokrivaju široki opseg (Milić Žitnik 2018). Analizirali smo isključivo kretanje onih asteroida koji su prešli preko rezonance. Istraživanje je izvršeno numeričkim integracijama javno dostupnim integratorom *ORBIT9*. Primetili smo da se asteroidi sa brzinama Jarkovskog reda 10^{-5} AJ/Mgod i sa manjim kreću veoma brzo preko RSK. Ovi rezultati mogu da ukazuju da ispod određene vrednosti da/dt , asteroidi tipično brzo pređu preko RSK. Iz dobijenih rezultata smo zaključili da je granična vrednost za brzinu Jarkovskog 7×10^{-5} AJ/Mgod.

Кључне речи: asteroidi; numeričке методе; ефекат Јарковског; резонанце у средњем кретању

Bibliografija

- [1] I. Milić Žitnik, B. Novaković. The role of mean-motion resonances in semimajor axis mobility of asteroids. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 816, L31 (6pp).
- [2] I. Milić Žitnik. Interaction between Yarkovsky force and mean-motion resonances: some specific properties. *Serb. Astron. J.*, 2016, 193, 19-26.
- [3] I. Milić Žitnik. Impact of Yarkovsky effect and mean motion resonances on main belt asteroid's transport. *Publ. Astron. Obs. Belgrade*, 2018, 98, 153-160.

Михаило Петровић Алас и комплексни бројеви

Миљан Кнежевић

Математички факултет Универзитета у Београду, Студентски трг 16

e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У овом излагању приказаћемо детаље са основног курса Комплексна анализа који је почетком двадесетог века на Универзитету у Београду држао Михаило Петровић Алас. Такође, представићемо неке од резултата Семинара за комплексну анализу у Београду који се односе на методу наставе математике.

Кључне речи: комплексни број; стереографска пројекција; Кошијеве неједнакости; конвексност.

О конвексности - неједнакости и визуелизација

Miodrag Mateljević

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Razmatramo jedan zadatak sa PISA testiranja i dajemo interpretaciju конвексности помоћу уливања течности у посуду. Такође, дајемо један визуелни доказ неједнакости Mihaila Petrovića Alasa за конвексне функције.

Izlaganje je pripremljeno u saradnji sa Miljanom Kneževićem, Marekom Svetlikom, Nikolom Mutavdžićem i Bojanom Jevtić.

Кључне речи: Конвексне функције; неједнакост Mihaila Petrovića Alasa; PISA testiranje.

Оптимизација портфолија заснована на вредности при ризику

Катарина Халај

*Математички факултет, Студентски трг 16, Београд
e-mail: halajkatarina@yahoo.com*

Апстракт. У овом раду представљамо основне појмове и теорију неопходну за конструкцију модела који се базирају на вредности при ризику као мери ризика (*mean-VaR* модели) Ефикасна граница овог модела се поклапа са ефикасном границом Марковицовог модела уз претпоставку о елиптичким расподелама добити, при чему су недостаци настали услед симетричности мере ризика сада превазиђени. У зависности од жеље инвеститора, можемо на различите начине вршити оптимизације портфолија, а ми смо навели неке од најпознатијих. Упознаћемо се са параметарском и непараметарском методом оцењивања вредности при ризику, уколико су нам доступни подаци о кретањима цена акција. Од параметарских метода користимо метод дисперзије и коваријације, а од непараметарских историјски метод. Уочићемо када постоје њихова ограничења, а затим ћемо исте и упоредити.

Кључне речи: вредност при ризику; оптимизација портфолија; параметарски и непараметарски *VaR*.

Библиографија

- [1] **J. C. Fransis, D. Kim.** *Modern portfolio theory, Foundations, Analysis, and New Developments, John Wiley & Sons, New Jersey*, 2013, 270 - 277.
- [2] **P. Best.** *Implementing Value at Risk, John Wiley & Sons, England*, 1998.
- [3] **J. C. Hull.** *Options, futures and other derivatives(9th edition), Pearson Education, University of Toronto*, 2015.
- [4] **M. Engels.** *Portfolio optimization: Beyond Markowitz*, 2004 , 37 - 30.
- [5] **Ch. Y. Tsao.** *Quantitative Finance, Portfolio selection based on the mean-VaR efficient frontier, Department of Industrial and Business Management, Chang Gung University*, 2010.
- [6] **N. D. Pearson.** *Risk budgeting, Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk, John Wiley & Sons, Canada*, 2002, 33 - 74.
- [7] **M. Choudhry.** *An introduction to value at risk(5th edition), John Wiley & Sons, United Kingdom*, 2013.
- [8] **A. A. P. Santos.** The Out-of-sample Performance of Robust Portfolio Optimization, Department of Statistics, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, 2010.
- [9] **K. T. Lwin, R. Qu, B. L. MacCarthy.** *Mean-VaR Portfolio Optimization: A Nonparametric Approach, Faculty of Science and Technology, Anglia Ruskin University, Chelmsford, UK*, , 2017.
- [10] **H. Markowitz.** *Portfolio Selection, Vol. 7, No. 1, The Journal of Finance*, 1952.
- [11] **H. Yao, Y. Li, K. Benson.** *A smooth non-parametric estimation framework for safety-first portfolio optimization, Guangdong University of Foreign Studies, China*, 2014.

Нови наџини за конструкцију постојаних тестова експоненцијалности

Marija Cuparić

*Математички факултет, Београд
e-mail: marijar@matf.bg.ac.rs*

Bojana Milošević

*Математички факултет, Београд
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Marko Obradović

*Математички факултет, Београд
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. На предаванју ће бити дат кратак преглед тестова експоненцијалности заснованих на карактеризацијама расподела и представљене две нове класе тестова. Прва класа је заснована на L^2 , а друга на L^∞ растојанју V -емпиријских Лапласових трансформација две узораџке функције. Биће приказана асимптотска својства тестова и одреџени њихови локални приближни Бахадурови нагиби. На основу тога, тестови ће бити упореџени са неким познатим и неким скорашњим постојаним тестовима експоненцијалности. Поред тога, приказаћемо и њихове емпиријске моћи, као и алгоритам којим се на основу података одреџује адекватна тежнска функција која фигурише у конструкцији нових тестова. На крају, квалитет тестова ћемо демонстрирати и применом на реалним подацима.

Кључне реџи: тестови експоненцијалности, асимптотска ефикасност, V -емпиријска Лапласова трансформација

Библиографја

- [1] **M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović.** New L^2 -type exponentiality tests. (2018). arXiv preprint arXiv:1809.07585.

Тестови сагласности са степеном расподелом који користе Пури-Рубин карактеризацију засновани на узорку ранжираних скупова

Бојана Милошевић

*Математички факултет, Студентски трг 16, Београд
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Марија Минић

*Фармацеутски факултет, Војводе Степе 450, Београд
e-mail: minicm@pharmacy.bg.ac.rs*

Марко Обрадовић

*Математички факултет, Студентски трг 16, Београд
e-mail: marcone@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. У овом раду упоређујемо Колмогоров-Смирнов тест и два теста заснована на Пури-Рубин карактеризацији за тестирање сагласности са степеном расподелом. Посматран је узорак добијен методом ранжираних скупова и упоређен са простим случајним узорком. Критичне вредности за два теста заснована на Пури-Рубин карактеризацији, а затим и моћи за сва три теста добијене су помоћу Монте-Карло симулације. Моћ теста када се користи узорак ранжираних скупова већа је од моћи теста када се користи прост случајан узорак за сва три

теста. Такође, за испитане вредности параметра степене расподеле, моћи два теста заснованих на Пури-Рубин карактеризацији имају већу моћ у поређењу са моћи Колмогоров-Смирнов теста.

Кључне речи: узорак ранжираних скупова; прост случајан узорак; тестови сагласности; степена расподела; Пури-Рубин карактеризација

Библиографија

- [1] **T. W. Anderson** On the Distribution of the Two-Sample Cramer-Von Mises Criterion. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, 33(3), 1148–1159.
- [2] **K. Yu. Volkova, Ya. Yu. Nikitin** Goodness-of-Fit Tests for the Power Function Distribution Based on the Puri-Rubin Characterization and Their Efficiencies. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, 199(2), 130–138.
- [3] **A. Lall** Data streaming algorithms for the Kolmogorov-Smirnov test. *2015 IEEE International Conference on Big Data*, 2015, 95–104.
- [4] **G. A. McIntyre** A method for unbiased selective sampling using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research*, 1952, 3, 385–390.
- [5] **J. Frey, L. Wang** EDF-based goodness-of-fit tests for ranked-set sampling. *The Canadian Journal of Statistics*, 2014, 42(3), 451–469.
- [6] **Y. Xiao, A. Gordon, A. Yakovlev** The L_1 -Version of the Cramer-von Mises Test for Two-Sample Comparisons in Microarray Data Analysis. *Journal on Bioinformatics and Systems Biology*, 2006, 85769, 1–9.

The Schwarz lemma and hyperbolic metric on the strip

Miodrag Mateljević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs

Marek Svetlik

University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs

Abstract. In this talk we give simple proofs of various versions of the Schwarz lemma for real valued harmonic functions and for holomorphic (more generally harmonic quasiregular, shortly HQR) mappings with the strip codomain. Along the way using the principle of subordination and the corresponding conformal mapping we get a simple proof of a new version of the Schwarz lemma for real valued harmonic functions (without the assumption that 0 is mapped to 0 by the corresponding map). Using the Schwarz-Pick lemma related to distortion for harmonic mappings and the elementary properties of the hyperbolic geometry of the strip we get optimal estimates for modulus of HQR mappings.

Keywords: The Schwarz lemma; the Schwarz-Pick lemma; harmonic, holomorphic and quasiregular mappings; hyperbolic metric on the strip

Библиографија

- [1] **M. Mateljević, M. Svetlik.** Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings, arXiv:1808.06647v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1808.06647>
- [2] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018) 78-100.

Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions

Miodrag Mateljević

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Abstract. We give review of some recent author's results which are related to subject communicated on Belgrade Analysis Seminar cf. [2]. In particular we consider results obtained in [6] and of the author joint works with M. Svetlik and A. Khalfallah, [10, 8, 9]. Our considerations are mainly based on the strip method in planar case [6] and the spherical cap method in \mathbb{R}^3 space [1].

This presentation is prepared in cooperation with Miljan Knežević, Marek Svetlik, Nikola Mutavdžić and Bojana Jevtić.

Keywords: The Schwarz lemma; Kobayashi metrics; harmonic holomorphic and quasiregular mappings; hyperbolic metric on the strip

References

- [1] **B. Burgeth.** Schwarz type inequalities for harmonic functions in the ball. *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Classical and Modern Potential Theory and Applications*, 1994 Kluwer Academic Publishers, 133-147.
- [2] **M. Mateljević.** Communications at Belgrade analysis seminar, University of Belgrade, 2017 and 2018.
- [3] **M. Mateljević.** Geometric function theory 1 (the manuscript is on the site www.matf.bg.ac.rs/~miodrag).
- [4] **M. Mateljević.** Hyperbolic geometry and Schwarz lemma. *Zbornik radova, VI Simpozijum „Matematika i primene”*, Beograd, 2016, p. 1-17.
- [5] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and distortion for harmonic functions via length and area, arXiv:1805.02979v1 [math.CV], <https://arxiv.org/abs/1805.02979v1>
- [6] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018) 78-100.
- [7] **M. Mateljević, A. Khalfallah.** Planar Schwarz lemma, in preparation September 2018.
- [8] **M. Mateljević, A. Khalfallah.** Schwarz lemmas for mappings with bounded Laplacian, arXiv:1810.08823v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1810.08823>
- [9] **M. Mateljević, A. Khalfallah.** Schwarz type inequalities for admitting a general Poisson type representation, in preparation, November 2018.
- [10] **M. Mateljević, M. Svetlik.** Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings, arXiv:1808.06647v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1808.06647>

Metaheuristički pristup rešavanju lokacijskog problema maksimalnog pokrivanja sa preferencijama korisnika

Lazar Mrkela

*Univerzitet Metropolitan Beograd, Tadeuša Koščuška 63, Beograd, Srbija
e-mail: lazar.mrkela@metropolitan.ac.rs*

Zorica Stanimirović

*Matematički fakultet Beograd, Studentski trg 16, Beograd, Srbija
e-mail: zoricast@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. U radu je razmatran lokacijski problem maksimalnog pokrivanja sa preferencijama korisnika (engl. Maximal covering location problem with customer preference ordering), koji ima značajnu primenu u optimizaciji mreža snabdevanja. Cilj problema je određivanje lokacija za postavljanje p objekata (uslužnih centara), a zatim i pridruživanje svakog potrošača nekom od uspostavljenih objekata koji se nalaze na rastojanju ne većem od unapred zadate vrednosti (radijusa pokrivanja),

tako da se maksimizuje ukupna zadovoljena potražnja potrošača. Pretpostavka je da na tržištu već postoje druge kompanije koje pružaju iste usluge, tako da potrošači mogu izabrati neki od novouspostavljenih ili postojećih objekata na osnovu svojih ličnih preferencija. U slučaju mreža snabdevanja koje uključuju veliki broj korisnika i potencijalnih lokacija za uspostavljanje uslužnih centara, egzaktne metode ne daju optimalno ili čak ni dopustivo rešenje u prihvatljivom vremenu izvršavanja. Iz tog razloga, razvoj i implementacija metaheurističkih metoda predstavlja adekvatan pristup rešavanju instanci problema velikih dimenzija. U radu je prikazano nekoliko metaheurističkih metoda čije su karakteristike prilagođene razmatranom problemu. Performanse metaheuristika su evaluirane na skupu test instanci iz literature i izvršena su poređenja metaheuristika u smislu kvaliteta dobijenih rešenja, stabilnosti i vremena izvršavanja.

Ključne reči: Lokacijski problem maksimalnog pokrivanja; Preferencije korisnika; Metaheurističke metode.

Emisione magline u patuljastoj eliptičnoj galaksiji NGC 185

Milica Vučetić

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd
e-mail: mandjelic@matf.bg.ac.rs*

Dragana Ilić

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd
e-mail: dilic@matf.bg.ac.rs*

Oleg Egorov

Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Universitetsky pr. 13, Moscow 119234, Russia

Alexei Moiseev

Special Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences, Nizhny Arkhyz 369167, Russia

Bojan Arbutina

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd
e-mail: arbo@matf.bg.ac.rs*

Dušan Onić

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd
e-mail: donic@matf.bg.ac.rs*

Dejan Urošević

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd
e-mail: dejanu@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. U ovom radu predstavljamo naša optička posmatranja galaksije NGC 185 koja su imala za cilj da otkriju prirodu emisionih maglina, a posebno ostataka supernovih (OSN) u ovoj patuljastoj eliptičnoj galaksiji. Ranijim posmatranjima predloženo je da se u njoj nalazi jedan OSN. Naša nedavna fotometrijska posmatranja kroz $H\alpha$ i [SII] uskopojasne filtere sa 2-metarskog teleskopa Nacionalne Astronomske Opservatorije Rožen u Bugarskoj pokazala je složenu strukturu meuzvezdane materije u centru galaksije, takođe sugerišući da se u galaksiji potencijalno nalazi još jedan OSN. Kako bismo ovo potvrdili i detaljnije proučili emisione magline u galaksiji NGC 185, a posebno njihovu kinematiku, sprovedi smo spektroskopska posmatranja koristeći SCORPIO spektrograf na 6-metarskom teleskopu Specijalne Astrofizičke Opservatorije Ruske Akademije Nauka. Takođe, pretragom arhivskih X-posmatranja tražili smo da li naši OSN kandidati zrače i u X-domenu.

Ključne reči: meuzvezdana materija – ostaci supernovih – galaksija NGC 185

Matematika u slikama (radionica)

Nives Baranović

*Filozofski fakultet, Split, Poljička cesta 35
e-mail: njozic@ffst.hr*

Apstrakt. Slike kao jedan od vizualnih medija nose određenu poruku, a vizualna pismenost pojedincu omogućava da tu poruku korektno interpretira, analizira, razumije i tumači te se njom dalje koristi. Slike u matematici nose odgovarajuću matematičku poruku ovisno o tome u koju svrhu i unutar kojeg konteksta se koristi.

Unatoč dominantnom analitičkom pristupu učenja i poučavanja matematike, zahvaljujući tehnološkom napretku, ali i rezultatima obrazovnih istraživanja koji ukazuju na pozitivan utjecaj vizualizacije u učenju i poučavanju matematike, primjena vizualizacije u matematici se intenzivno povećava zadnjih 20-tak godina. Iako upotreba slika može osigurati prednost u učenju i poučavanju kada se ispravno koriste, slike mogu uzrokovati i mnoge teškoće jer ne nude određenu rutinu kao procedure, kojima su učenici jako skloni. Rezultati istraživanja pokazuju da su slike kognitivno zahtjevnije od analitičkih metoda i kao takve učenicima odbojnije te ih mnogi nerado koriste.

Kako bi nastavnici razvijali vizualnu pismenost svojih učenika i sami trebaju razvijati vještine stvaranja, interpretiranja i vrednovanja slika te poznavati strategiju poučavanja koja se temelji na metodi vizualizacije. Stoga je cilj ove radionice, kroz odabrane primjere ukazati na prednost i nedostatke učenja i poučavanja primjenom slika koje nose matematičku poruku.

Zahtevi radionice: Na radionici mogu sudjelovati i učitelji i nastavnici matematike, a ovisno o broju sudionika može se raditi individualno, u paru ili grupi.

Vrijeme trajanja: 60 - 90 minuta.

Ključne reči: matematičke slike; metoda vizualizacije; vizualna pismenost; vizualni dokazi.

Non-linear Resonant Wave-plasma Interactions at Collisionless Shocks

Vladimir Zeković

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia
e-mail: vlada@matf.bg.ac.rs*

Abstract. We present the theoretical model and simulations of the wave-plasma interactions at quasi-parallel magnetized collisionless shocks. By the linear theory, we show how the two opposite plasma streams excite the resonant instabilities. We examine the interaction between the particles and resonant modes in the non-linear regime by using the test particle simulations. The exact solution to the kinetic plasma equations is obtained numerically within the Particle-In-Cell simulations. We explain how these instabilities trigger, transmit and reform the shock wave, and also how they govern the processes of particle injection and acceleration, from supra-thermal to ultra-relativistic energies. In the resulting momentum spectra of the particles, we observe that suprathermal and non-thermal components are strongly related to the properties of the upstream instability.

Keywords: Collisionless shocks; PIC simulations; Resonant microinstabilities; Particle acceleration; Wave-particle interaction.

Metaheuristički pristup rešavanju problema p -medijane sa ravnotežnim ograničenjima

Kristina Kostić

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16
e-mail: kristina_kostic@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Lokacijski problemi čine značajnu klasu problema optimizacije sa širokom primenom u praksi, posebno pri optimizaciji troškova u transportnim i telekomunikacionim mrežama. U opštem slučaju, lokacijski problemi podrazumevaju određivanje optimalnih lokacija za izgradnju objekata koji pružaju neku vrstu usluge, kao i pridruživanje svakog korisnika jednom ili više uspostavljenih uslužnih centara sa ciljem minimizacije ili maksimizacije određene funkcije cilja pri uslovima koji zavise od karakteristika konkretne mreže. Problem p -medijane (engl. *p-median problem*), jedan od značajnih pripadnika ove klase problema, podrazumeva lokaciju p uslužnih objekata i alokaciju korisnika uspostavljenim objektima sa ciljem minimizacije transportnih troškova. U radu će biti razmatrana varijanta problema p -medijane koja uključuje dodatna ograničenja sa ciljem balansiranja procesa opsluživanja korisnika (engl. *p-median problem with balance constraints, p-MBC*). Kako p -MBC spada u klasu NP-teških problema kombinatorne optimizacije, u ovom radu je korišćen metaheuristički pristup za njegovo rešavanje. Implementirana je modifikacija metode promenljivih okolina (engl. *Variable Neighborhood Search, VNS*) čije su karakteristike prilagođene karakteristikama p -MBC problema. Predložena metoda testirana je na test primerima iz literature i dobijeni rezultati su analizirani i upoređeni sa rezultatima egzaktong rešavača.

Кljučне речи: kombinatorna optimizacija, problem p -medijane, metaheuristike, metoda promenljivih okolina.

Bibliografija

- [1] **Diaz, J.A. and Luna, D.E.** Primal and dual bounds for the vertex p -median problem with balance constraints. *Annals of Operations Research*, Vol. 258, 2017, pp. 613–638.
- [2] **Zanjirani, R. and Hekmaftar, M.** Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and case Studies, Springer, 2009.
- [3] **Hansen, P., Mladenović, N., and Pérez, J.A.M.** Variable neighbourhood search: methods and applications. *Annals of Operations Research*, Vol. 175, No.1, 2010, pp. 367–407.

Геометријске неједнакости Михаила Петровића

др Војислав Андрић

*Ваљевска гимназија, Ваљево
e-mail: voja.andric@gmail.com*

Апстракт. У огромном научном и стручном опусу Михаила Петровића налази се и неколико занимљивих геометријских неједности. Циљ овог саопштења је да се укаже на неке од њих и прокоментарише њихову историју и идеје за њихово доказивање (елементарне и опште).

Кључне речи: геометријске неједнакости; Михаило Петровић.

Конструкција прстена примитивних Питагориних тројки

Milan Živanović

Visoka škola струkovnih sudija za vaspitače, Kruševac
e-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs

Апстракт. Problematika Pitagorinih trojki (trouglova) je jedna od najeksploatisanijih tema u matematici. U početku se radilo na različitim parametrizacijama pronalaženja svih pravouglanih trouglova sa celobrojnim stranicama. Kasnije su proučavane osobine prirodnih brojeva elemenata Pitagorinih trojki. Na kraju predmet izučavanja postaju operacije na skupu svih Pitagorinih trojki ili nekim njegovim podskupovima i na taj način nastale algebarske strukture.

U ovom saopštenju najpre će biti predstavljeno jedno uopštenje Diksonove parametrizacije i na osnovu toga određen broj primitivnih Pitagorinih trouglova opisanih oko kružnice datog poluprečnika. Na skupu svih primitivnih Pitagorinih trojki ćemo definisati relaciju linearnog poretka koja će omogućiti konstrukciju bijekcije sa skupom celih brojeva. Pomoću te bijekcije na skupu svih primitivnih Pitagorinih trouglova indukovaćemo po jednu aditivnu i multiplikativnu operaciju koje na tom skupu grade komutativan prsten.

Кључне речи: Pitagorine trojke; relacija poretka; bijekcija; prsten

Bibliografija

- [1] L. E. Dickson History of the Theory of Numbers, . *Diophantine Analysis*, Vol.II., Carnegie Institution of Washington, Publication No. 256, 1920.
- [2] N. Robins. On the number primitive Pythagorean triangles with a given inradius *Fibonacci quarterly*, 44/4, 2006, pp. 368-369.
- [3] M. Živanović Relacije i matematičke operacije na jednoj klasi Pitagorinih trouglova. *Third Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Volume II*, Trebinje 2014, pp. 97-101.

Употреба динамичког софтвера код испитивања функција са параметрима

Радослав Божић

Природно - математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com

Апстракт. Испитивање функција представља важан део градива у средњем и високом образовању. Пракса је, као и ранија истраживања, показала да значајан број ученика, односно студената, има потешкоће у савладавању овог дела градива. Употреба софтвера омогућава да се процес испитивања функције убрза, чиме је омогућено да се, за краће време, испита већи број функција. Већина програма, који се могу користити код испитивања функција, омогућава истовремено посматрање различитих репрезентација функција, пре свега алгебарске и графичке. Динамички софтвер, поред тога што додатно убрзава рад на испитивању функција и њихових особина, значајно поједностављује испитивање функција са параметрима. Испитивање оваквих функција без употребе динамичког софтвера захтева много времена и представља потешкоћу великом броју ученика, односно студената. Динамичке особине појединих програма омогућавају да се, приликом испитивања особина функције са параметрима, мења вредност сваког од параметара појединачно и да се посматрају промене у оквиру графичке и алгебарске репрезентације функције, односно њених особина. На тај начин је омогућено да се испита утицај појединих параметара на особине функције, као и да се уоче разлике између функција исте класе, односно сличности између функција које припадају различитим класама.

Кључне речи: Динамички софтвер; Функције; Параметри.

Библиографија

- [1] **A. Anabousy, W. Daher, N. Baya'a, M. Abu-Naja.** Conceiving function transformations in different representations: Middle school student working with technology. *Mathematics Education*, 2014, 9(2), 99 - 114.
- [2] **M. Borba, J. Confrey.** A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 1996, 31, 319 - 337.
- [3] **R. McClaran.** Investigating the Impact of Interactive Applets on Students' Understanding of Parameter Changes to Parent Functions: An Explanatory Mixed Methods Study. *Theses and Dissertations-Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education*, 2013.

Računarski postupci u zasnivanju diferencijalnih operatora u trodimenzionalnom i četvorodimenzionalnom slučaju

Branko Malešević

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija
e-mail: malesevic@etf.bg.ac.rs

Bojan Banjac

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad, Srbija
e-mail: bojan.banjac@uns.ac.rs

Danijela Branković

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija
e-mail: danijela@etf.bg.ac.rs

Ivana Jovović

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija
e-mail: ivana@etf.bg.ac.rs

Apstrakt. U ovom radu predstavljena su prebrojavanja i odgovarajuće rekurzivne formule za izračunavanje broja kako svih kompozicija višeg reda, tako i netrivialnih kompozicija višeg reda diferencijalnih operatora sa i bez izvoda u pravcu. U trodimenzionalnom i četvorodimenzionalnom prostoru \mathbb{R}^3 , odnosno \mathbb{R}^4 , date su matrice reprezentacije diferencijalnih operatora. Takođe, je u \mathbb{R}^4 uspostavljena veza sa Lewis-Wilson-ovim diferencijalnim operatorima.

Ključne reči: diferencijalni operatori, rekurzivne formule, prebrojavanja, matricna reprezentacija

Bibliografija

- [1] B. J. Malešević, A note on higher-order differential operations, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.* **7** (1996), 105–109.
- [2] B. J. Malešević, Some combinatorial aspects of differential operation composition on the space \mathbb{R}^n , *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.* **9** (1998), 29–33.
- [3] B. J. Malešević, Some combinatorial aspects of the composition of a set of function, *Novi Sad J. Math.*, **36** (1), 2006, 3–9.
- [4] B. J. Malešević, I. V. Jovović, The Compositions of Differential Operations and Gateaux Directional Derivative, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 10 (2007).

Метода променљивих околина за решавање проблема континуалне оптимизације

Душан Милосављевић

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд
e-mail: dusan_milosavljevic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Класичне методе локалне претраге у пракси често не доводе до најбољег решења неког оптимизационог проблема. За разлику од њих, метода променљивих околина (енгл. Variable Neighborhood Search, VNS) је метахеуристички приступ заснован на систематичној промени околина у току претраге, у циљу проналажења бољег решења. Ефикасност методе у великој мери зависи од величине и геометрије коришћених околина, од начина случајног избора тачака у фази размрдавања VNS методе као и начина претраживања околина у фази локалног претраживања.

У раду ће бити приказан алгоритам методе променљивих околина, различите типове околина које се користе, као и методе локалног претраживања које су се показале ефикасним у пракси. Затим ће бити представљена имплементација алгоритма развијена у овом раду, резултати за проблеме различитих димензија који су познати из литературе, као и однос тих резултата са познатим резултатима других метахеуристичких метода.

Кључне речи: континуална оптимизација, глобална оптимизација, метода променљивих околина, метахеуристике.

Библиографија

- [1] N. Mladenović, P. Hansen. Variable neighborhood search: Principles and applications. *European Journal of Operation Research*, 2001, 130(3), 449 - 467.
- [2] M. Dražić, V. Kovačević Vujčić, M. Čangalović, N. Mladenović. Glob - a new VNS-based software for global optimization. *Nonconvex Optimization and its applications*, 2006.

Vehicle Scheduling Problems: Mathematical Models, Solution Methods, and Applications

Zorica Stanimirović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Studentski trg 16, 11 000 Belgrade, Serbia
e-mail: zoricast@matf.bg.ac.rs

Abstract. Vehicle scheduling problems (VSPs) represent a challenging class of optimization problems with significant application in the fields of transportation, distribution, and logistics. Interest in VSPs originates not only from their practical importance, but also from a considerable difficulty in providing their optimal or near-optimal solutions. In this study, several vehicle scheduling problems that arise from optimizing the transportation of raw materials in a large production company are considered. Efficient transport organization is of great importance in the initial production phase, having in mind that even small reductions of time and money spent in this phase directly increase the company's profit. Adequate mathematical models for each of the considered vehicle scheduling problems are presented and analyzed. As it is proved that all considered VSPs belong to the class of NP-hard problems, adequate solution methods are designed and implemented. The conducted computational study shows that the proposed methods are successful in reaching optimal solutions and that are capable to deal with large problem dimensions.

The results are obtained in collaboration with A. Anokić, T. Davidović, and Đorđe Stakić.

Keywords: Vehicle scheduling problems; Transport optimization; Mathematical modelling; Optimization methods.

Podrška učeniku kroz individualizaciju i projektni rad u nastavi matematike

Mirjana Kokerić

OŠ Branko Radičević" Smederevo
e-mail: mirjana.kokeric@gmail.com

Siniša Ćulafić

OŠ "Miša Stojković" Gaj
e-mail: culfis@gmail.com

Apstrakt. Popularizacija matematike među učenicima osnovnih i srednjih škola može se ostvariti kroz projektni rad. Motivacija učenika za učenje matematike raste kada se rad na času direktno veže za iskustvo i interesovanja učenika. Individualizovani pristup daje rezultate u učenju kod talentovanih učenika, ali i kod učenika koji pripadaju marginalizovanim grupama. Akreditovani seminar stručnog usavršavanja pod nazivom "Podrška učeniku kroz individualizaciju i projektni rad u nastavi matematike" nudi nastavnicima i učiteljima primere radionica projekata, primere korelacije nastave Matematike sa nastavom Fizike, Informatike i Tehničkog obrazovanja. Projekti sprovedeni na platformi Etwinning nagrađeni su Evropskim oznakama kvaliteta u tri zemlje regiona i služili su razvoju motivacije kod učenika za učenje matematike, stavljanju učenika u centar učenja, individualizaciji u procesu učenja matematike, razvoju veština saradnje, komunikacije, timskog duha i međupredmetnih kompetencija kod učenika, kreiranju novih nastavnih sredstava od recikliranog materijala, onlajn podršku dodatnoj nastavi i pripremi za takmičenja, kreiranju IKT produkata učenja. Creative Math Class, Math Coaching, Math across the Europe, Universal Language Math, E-dodatna 2, su uspešno sprovedeni projekti koji su ponudili učenicima i kolegama saradnicima, a sada putem onlajn seminara i široj grupi zainteresovanih kolega, nove inovativne načine učenja matematike kao i načine za razvijanje ljubavi prema matematici kod svih učenika.

Кljučне речи: individualizacija; projekti; seminar.

Библиографија

- [1] **M. Kokerić.** Pitagorino blago. *Zbornik radova Digitalni čas, Mistarstvo trgovine, turizma i telekomunikacija*, 2016.
- [2] **M. Kokerić.** Razmera u svetu oko nas. *Zbornik radova Digitalni čas, Mistarstvo trgovine, turizma i telekomunikacija*, 2015.
- [3] **M. Kokerić.** Matematika u digitalnom okruženju. *Zbornik radova Digitalni čas, Mistarstvo trgovine, turizma i telekomunikacija*, 2017.

Уопштење једног резултата Љ. Ђирића

Мирко С. Јовановић

Електротехнички факултет, Булевар краља Александра 73, 11000 Београд, Србија
e-mail: msj.sbb.rs

Апстракт. У овом раду се доказује теорема која уопштава један резултат Љ. Ђирића [1].

Кључне речи: fixed point; generalized contraction mapping.

Теорема 1. Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $S : X \mapsto X$, $T : X \mapsto X$ тако да важи

$$d(Sx, Ty) \leq \max \left\{ \Phi(d(x, y)), \Phi(d(x, Sx)), \Phi(d(y, Ty)), \Phi\left(\frac{d(x, Ty) + d(y, Sx)}{2}\right) \right\},$$

за све $x, y \in X$, где је $\Phi : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ монотono растућа одозго полунепрекидна функција таква да је $\Phi(t) < t$ за $t > 0$ и $\Phi(0) = 0$. Тада пресликавања S и T имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Библиографија

- [1] **Lj. Ćirić:** On a family of contractive maps and fixed points. *Institut Mathématique. Publications. Nouvelle Série. Inst. Math., Belgrade*, 1974, 17, 45 - 51.

Korištenje teorije ekstrema za procjenu tržišnog rizika

Elvir Čajić

*Gimnazija Mostar, Španski trg, 88000 Mostar
e-mail: ecajic86@gmail.com*

Apstrakt. Ovaj primjer pokazuje kako modelirati tržišni rizik hipotetičkog globalnog indeksa indeksa kapitala sa simulacijskom tehnikom koristeći Copula i teorije ekstremne vrijednosti (EVT). Proces prvo izvlači filtrirane ostatke iz svake povratne serije sa asimetričnim GARCH modelom, zatim konstruiše marginalnu kumulativnu distribucijsku funkciju (CDF) uzorka za svako sredstvo koristeći Gaussovu procjenu jezgra za unutrašnjost i generalizovanu procjenu Pareto distribucije (GPD) za gornju i donju granicu. Kopula tada odgovara podacima i koristi se za indukovanje korelacije između simuliranih rezidua svakog sredstva. Konačno, simulacija procjenjuje vrijednost rizika (VaR) hipotetičkog globalnog portfolia kapitala u toku jednog mjesečnog horizonta. Imajte na umu da je ovo relativno napredan, sveobuhvatan primjer koji pretpostavlja nekakvo poznavanje EVT-a i kopulasa. Neobrađeni podaci se sastoje od 2665 zapažanja dnevnih vrijednosti zatvaranja reprezentativnih vlasničkih indeksa koji obuhvataju datume trgovanja 27 april-1993. do 14-jula-2003. Ovaj primjer se može iskoristiti i za procjenu tržišta i za područje regije međutim to ćemo ostaviti nekim budućim istraživačima.

Ključne reči: ekstremi, tržište rizika, finansijska matematika, Matlab, model.

Bibliografija

- [1] **Bouye, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and Roncalli, T.** "Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications." Groupe de Rech. Oper., Credit Lyonnais, Paris, 2000.
- [2] **Filipović, M.** (2004), Metodologija znanosti i znanstvenog rada, Svjetlost Sarajevo
- [3] **Dževad, T.** (2016), Problemi meta metodologije (2016);
- [4] **Radosavljević, I., Termiz, Dž., Danilović, N., Gordić, M.** Statistika u istraživanju društvenih pojava (2016).
- [5] **Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann.** "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls". *Risk Management: Value At Risk and Beyond*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, pp. 176–223.
- [6] **Dai, Y., Han, D., Dai, W.** (2014) Modeling and Computing of Stock Index Forecasting Based on Neural Network and Markov Chain, *The Scientific World Journal*, Vol. 2014, pp. 1-10.
- [7] **McNeil, A. and R. Frey.** "Estimation of Tail Related Risk Measure for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach." *Journal of Empirical Finance*. Vol. 7, 2000, pp. 271–300
- [8] **Mashal, R. and A. Zeevi.** "Beyond Correlation: Extreme Co-movements between Financial Assets." Columbia University, New York, 2002.

Problem p -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama

Olivera Stančić

*Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, Liceja Kneževine Srbije 3, 34000 Kragujevac, Srbija
e-mail: olivera.stancic@kg.ac.rs*

Apstrakt. U ovom radu je razmatran problem p -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama (engl. Uncapacitated Single Allocation p -hub Maximal Covering Problem - USApHMCP) i binarnim konceptom pokrivanja. Cilj USApHMCP je određivanje optimalnih lokacija za uspostavljanje tačno p habova, tako da se maksimizuje ukupan protok po svim pokrivenim parovima snabdevač-korisnik. U slučaju binarnog pokrivanja, par korisnik-snadbevač se smatra pokrivenim ukoliko cena transporta od čvora-snadbevača do čvora-korisnika nije veća od unapred zadate maksimalne cene. Predstavljen je matematički model USApHMCP u vidu mešovitog celobrojnog linearnog programa. Kako egzaktne rešavači pronalaze optimalna ili dopustiva rešenja samo na instancama problema malih dimenzija, razvijena je opšta metoda promenljivih okolina (engl. General Variable Neighborhood Search - GVNS), kao metaheuristički pristup rešavanju USApHMCP. Konstruktivni elementi i parametri GVNS metode su prilagođeni razmatranom problemu. Eksperimentalni rezultati, dobijeni testiranjem GVNS metode na hab skupovima podataka iz literature, pokazuju efikasnost GVNS metaheuristike pri rešavanju USApHMCP sa binarnim pokrivanjem, kao i njenu superiornost u odnosu na postojeće metode iz literature.

Ključne reči: problem p -hab maksimalnog pokrivanja; binarno pokrivanje; opšta metoda promenljivih okolina.

Nezavisnost lovaca na šahovskoj tabli

Milan Živanović

*Visoka škola strukovnih studija za vaspitače, Kruševac
e-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs*

Apstrakt. Matematika je nastala iz potrebe čoveka da reši realne probleme koji su mu se nametali u težnji da unapredi uslove svoje egzistencije. Opravdano se javlja i potreba za prenošenjem znanja koja su na taj način dobijena. Stoga nije čudno što su najstariji čisto matematički spisi bili namenjeni upravo za podučavanje. Razlike između teorije i nastave tada gotovo da nije ni bilo. Međutim, vremenom su matematičke strukture dostigle takav stepen apstraktnosti da je očiglednost kao jedan od osnovnih principa nastave ponekad veoma teško uključiti u praksi. Stoga se moramo složiti sa Paskalovim stavom da ne treba propustiti nijednu priliku da matematiku učinimo zanimljivom.

Veliku ulogu u afirmaciji matematike imaju problemi korelirani sa popularnim društvenim igrama. Veza između matematike i šaha poseduje ogroman motivacijski potencijal. Matematički problemi na šahovskoj tabli se mogu sagledati kroz različite discipline: geometriju, teoriju brojeva, kombinatoriku i druge. Kombinatornim problemima na šahovskoj tabli bavili su se Ojler i Gaus. Zadaci rasporedjivanja istovetnih figura na tabli tako da se one međusobno ne napadaju poznati su kao "Problemi nezavisnosti šahovskih figura". Posebno su zanimljivi oni problemi sa maksimalnim brojem nezavisnih figura. U ovom tekstu će biti predstavljene neke metode rešavanja problema nezavisnosti lovaca na šahovskoj tabli.

Ključne reči: popularizacija matematike; matematika i šah; nezavisnost šahovskih figura.

Bibliografija

- [1] S. E. Aršon. Rešenje odnoj kombinatornoj zadači. *Matematičeskoe prosvješćenie*, 1936, 8, 24 - 29.
- [2] H. E. Dudeney. *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons, LTD, London, Edindurg, New York, 1907.
- [3] I. J. Gik. *Šahmati i matematika*, Nauka, Moskva, 1983.
- [4] J. L. Okunjev. *Kombinatornie zadači na šahmatnoj doske*, -M. -L., ONTI, 1935.

Решавање система линеарних једначина (осврт на честе грешке и неки трикови)

др Владимир Балтић

ВИШЕР, Математичка гимназија, Београд
e-mail: baltic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У овом предавању ћемо се осврнути на неке честе грешке при решавању система линеарних једначина – биће илустроване скенираним ученичким радовима. Затим ћемо се позабавити терминологијом (сагласан, несагласан; слободне и везане променљиве; шта значи да је систем **неодређен**, као и да ли систем може бити **немогућ**?) и дати један метод, који се заснива на линеарној (не)зависности једначина за генерисање једначина на самој табли који илуструју сва 3 случаја (када систем има јединствено решење, када нема решења и када има вишеструко решење). Такође ћемо илустровати и решавање система једначина коришћењем програмског пакета Мејпл. Кроз предавање ћемо урадити доста занимљивих примера, а и осврнућемо се на то зашто не ваља убеник математике на Мегатренду (погрешна дискусија приликом решавања система преко детерминанти).

Циклотомични полиноми, фундаменталне групе и Фоксов рачун

Александра Костић

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд, Србија
e-mail: alex@matf.bg.ac.rs

Нела Милошевић

Факултет за информационе системе и технологије Доња Горница, Октобр 1, Подгорица, Црна Гора
e-mail: nela.milosevic@udg.edu.me

Зоран Петровић

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд, Србија
e-mail: zoranp@matf.bg.ac.rs

Апстракт. У раду [1] показано је да се коефицијенти циклотомичних полинома могу тумачити тополошки преко придружених симплицијалних комплекса и њихових хомолошких група. Поред хомолошких група, у контексту циклотомичних полинома, занимљиво је посматрати и фундаменталну групу придружених симплицијалних комплекса. Како је фундаментална група дата својом коначном презентацијом, односно генераторима и релацијама између њих, поставља се питање када су две групе овог типа изоморфне. У овом излагању биће представљено како помоћу технике зване слободан (Фоксов) рачун можемо показати да две коначно презентоване групе нису изоморфне. Наиме, користећи слободан рачун, свакој коначно презентованој групи можемо доделити низ елементарних идеала, при чему изоморфне групе имају исти низ елементарних идеала. Посматрајући низ елементарних идеала могу се разликовати неке коначно презентоване групе. На основу претходног, дат је одговор на отворено питање у раду [1].

Кључне речи: Фундаментална група, Фоксов рачун.

Библиографија

- [1] G. Musiker, V. Reiner. The cyclotomic polynomial topologically. *J. Reine Angew. Math.*, 2014, 687, pp 113 - 132.

Problem optimalne funkcije $\{k\}$ -pakovanja za grafove cvetnih latica

Milica Milivojević-Danas

*Prirodno-matematički fakultet, Radoja Domanovića 12, Kragujevac
e-mail: milica.milivojevic@kg.ac.rs*

Zoran Maksimović

*Univerzitet odbrane, generala Pavla Jurišića Šturma 33, Beograd
e-mail: zoran.maksimovic@gmail.com*

Aleksandar Savić

*Matematički fakultet, Studentski trg 16/IV, Beograd
e-mail: asavic@matf.bg.ac.rs*

Jozef Kratica

*Matematički institut SANU, Kneza Mihaila 36, Beograd
e-mail: jkratica@mi.sanu.ac.rs*

Apstrakt. Leoni i Hinrichsen [1] su uveli problem optimalne funkcije $\{k\}$ -pakovanja radi rešavanja problema smeštanja otpada. Za zadat prirodan broj k i zadati graf G problem optimalne funkcije $\{k\}$ -pakovanja je odrediti funkciju f koja čvorovima grafa dodeljuje nenegativne cele brojeve tako da je suma vrednosti funkcije f za čvorove u zatvorenoj okolini svakog čvora manja ili jedna od k a suma vrednosti funkcije f nad svim čvorovima, u oznaci $L_{\{k\}}(G)$, maksimalna. Broj $L_{\{k\}}(G)$ se naziva i optimalni broj $\{k\}$ -pakovanja grafa G . Leoni i Dobson su pokazali u [2] da je problem nalaženja optimalne funkcije $\{k\}$ -pakovanja NP -težak u opštem slučaju, ali i za bipartitne grafove. Klasa grafova cvetnih latica J_n (Flower snarks) je jedna klasa povezanih 3-regularnih grafova sa hromatskim brojem 4 koju je uveo Rufus Isaacs 1975.-te godine. Kratica i dr. [3] su odredili tačne vrednosti za neke klase grafova kao i neke granice za optimalni broj $\{k\}$ -pakovanja grafa u opštem slučaju. U ovom radu je izračunata tačna vrednost optimalnog broja k -pakovanja za klasu grafova cvetnih latica i dobijeno je da je $L_{\{k\}}(J_n) = n \cdot k$.

Ključne reči: funkcija $\{k\}$ -pakovanja; grafovi cvetnih latica; grafovske invarijante.

Bibliografija

- [1] **V. Leoni, E.G. Hinrichsen** $\{k\}$ -Packing Functions of Graphs, In: *P. Fouilhoux, L.E.N. Gouveia, A.R. Mahjoub, V.T. Paschos (Eds.), International Symposium on Combinatorial Optimization Springer, Cham, 2014, pp 325–335.*
- [2] **V. Leoni, M. Patricia Dobson** Towards a Polynomial Equivalence Between $\{k\}$ -Packing Functions and k -Limited Packings in Graphs, In: *R. Cerulli, S. Fujishige, A.R. Mahjoub (eds.), International Symposium on Combinatorial Optimization Springer, Cham, 2016, pp 160–165.*
- [3] **J. Kratica, A. Savić, Z. Maksimović** Some properties of $\{k\}$ -packing function problem in graphs, *arXiv:1803.03147*, 2018, 1 - 16.

On Hollenbeck and Verbitsky conjecture and F. Riesz theorem

Marijan Marković

University of Montenegro
e-mail: marijanmmarkovic@gmail.com

Petar Melentijević

University of Belgrade
e-mail: petar.melentijevic31@gmail.com

Abstract. We denote by \mathbf{T} the unit circle. Let $L^p(\mathbf{T})$ be the Lebesgue space over the unit circle \mathbf{T} , and let $H^p(\mathbf{T})$ be the subspace of $L^p(\mathbf{T})$ for which the negative Fourier coefficients are equal to zero.

The Riesz projection operator P_+ is defined as

$$P_+ f(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n) \zeta^n \in H^p(\mathbf{T})$$

for a function $f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \zeta^n \in L^p(\mathbf{T})$, where $\hat{f}(n)$ is the Fourier coefficient of the order n . The operator $P_- = I - P_+$, where I is the identity operator on $L^p(\mathbf{T})$, is known as the coanalytic projection.

It is a classical result that Riesz projection P_+ is a bounded operator as an operator on $L^p(\mathbf{T})$ space for every $1 < p < \infty$, as proved by M. Riesz. But it needed a long time to find the exact norm of the Riesz projection.

In 2000, Hollenbeck and Verbitsky [1] finally proved that the norm is equal to $(\sin \pi/p)^{-1}$. Moreover, they obtained the following best possible estimate

$$\| \max\{P_+ f, P_- f\} \|_p \leq (\sin \pi/p)^{-1} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbf{T}).$$

In [2] Hollenbeck and Verbitsky stated a more general problem to find the optimal constant in the inequality

$$\| (|P_+ f|^s + |P_- f|^s)^{1/s} \|_p \leq C_{p,s} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbf{T}).$$

They also stated the conjecture on exact vales of the constants $C_{p,s}$.

This problem for $s = 2$ is solved quite recently by Kalaj in [3]. We confirm the Hollenbeck and Verbitsky conjecture for some other cases where $s \neq 2$. We also consider the analytic \mathbf{C}^m -valued mappings and reverse optimal inequalities.

Some of the inequities for complex numbers we use may be applied to extend the classical F. Riesz theorem on conjugate functions in more general settings.

Keywords: Hardy spaces, Riesz projection; Hilbert transform, harmonic functions, conjugate harmonic functions

Bibliografija

- [1] **B. Hollenbeck, I.E. Verbitsky.** Best Constants for the Riesz Projection. *Journal of Functional Analysis*, 2000, 175, 370 - 392.
- [2] **B. Hollenbeck, I.E. Verbitsky.** Best Constant Inequalities Involving the Analytic and Co-Analytic Projection. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2010, 202, 285 - 295.
- [3] **D. Kalaj.** On Riesz type inequalities for harmonic mappings on the unit disk. *Transaction of the Amer. Math. Society*, to appear.

Primena nelinearnih dinamičkih modela u ekonomiji sa analizom podataka o ceni pšenice

Jelena Stanojević

Ekonomski fakultet, Univerziteta u Beogradu

e-mail: jelenas@ekof.bg.ac.rs

Katarina Kukić

Saobraćajni fakultet, Univerziteta u Beogradu

e-mail: k.mijailovic@sf.bg.ac.rs

Nemanja Vuksanović

Ekonomski fakultet, Univerziteta u Beogradu

e-mail: vuksanovic@ekof.bg.ac.rs

Apstrakt. U ovom radu predlažen je novi model rasta za proizvodnu cenu pšenice, koji se bazira na generalizovanu logističku jednačinu. Sa dodatnim parametrom u generalizovanoj logističkoj jednačini mi se više približavamo zadatom modelu za različite cene pšenice, posmatranih u različitim zemljama. Dok je obična logistička jednačina već dobro poznata u literaturi (pogledati Ausloos and Miskiewicz (2006) i Lopez-Ruiz and Fournier-Prunaret (2004)), kao i njeno ponašanje, jedan mogući pravac uopštenja jeste upravo ovaj, sa dodatnim parametrom. Naime, novi model ima tri parametra, gde mi posmatramo jedan fiksirani i analiziramo ponašanje i valjanost modela u odnosu na dva parametra. Data je i analiza na podacima iz 4 različite zemlje i pokazan je bolji rezultat sa primenom ovog generalizovanog logističkog modela za njih.

Ključne reči: Logistička jednačina, Generalizovana logistička jednačina, dinamika sistema, stabilnost

Bibliografija

- [1] **M. Ausloos, J. Miskiewicz** Influence of information flow in the formation of economic cycle. *The logistic map and the Rout to Chaos. Berlin: Springer-Verlang*, 2006, 223-238.
- [2] **C.H. Hommes C. H.** Adaptive learning and roads to chaos. *Economics Letters*, 1991, 36, 127-132.
- [3] **J. Stanojević, K. Kukić** Dynamical systems in Economics, *AIP Conference Proceedings 1926, 020043*, <https://doi.org/10.1063/1.5020492>

