

УНИВЕРЗИТЕТУ БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

## КЊИГА АПСТРАКАТА

X СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
6. децембар и 7. децембар 2019.



КЊИГА АПСТРАКАТА – X СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
6. децембар и 7. децембар 2019.

*Издавач:*

Универзитет у Београду  
Математички факултет

*За издавача:*

проф. др Зоран Ракић, декан

*Главни и одговорни уредник:*

доц. др Миљан Кнежевић

*Уредник:*

доц. др Александра Делић

*Припрема за штампу:*

доц. др Миљан Кнежевић  
доц. др Александра Делић  
Марек Светлик  
Ђорђе Стакић

*Корице:*

доц. др Миљан Кнежевић

*Штампа:*

Донат Граф

*Тираж:*

85 примерака

## Програмски одбор X Симпозијума „Математика и примене”

- **проф. др Стеван Пилиповић**, академик САНУ, председник одбора,
- **проф. др Миодраг Матељевић**, академик САНУ, редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Зоран Ракић**, декан Математичког факултета,
- **проф. др Дарко Милинковић**, редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Небојша Икодиновић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Зорица Станимировић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Мирослав Марић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Драгана Илић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Јелена Катић**, ванредни професор Математичког факултета,
- **доц. др Миљан Кнежевић**, доцент Математичког факултета,
- **доц. др Марко Обрадовић**, доцент Математичког факултета

## Организациони одбор X Симпозијума „Математика и примене”

- **доц. др Миљан Кнежевић**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, председник одбора,
- **проф. др Зорица Станимировић**, ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Александра Делић**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Владимир Божин**, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Марек Светлик**, асистент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Ђорђе Стакић**, асистент Економског факултета Универзитета у Београду,
- **Давид Цвекић**, студент, Математички факултет Универзитета у Београду,
- **Нада Ђорђевић Веселиновић**, шеф Рачунарске лабораторије Математичког факултета Универзитета у Београду



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕСЕТИ СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
НАЦИОНАЛНИ СКУП СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

Програм првог дана Симпозијума одржава се у згради САНУ,  
Кнез Михаилова 35

Програм другог дана Симпозијума одржава се у просторијама  
Математичког факултета,  
Студентски трг 16

ПРОГРАМ

1. ДАН, ПЕТАК 6. ДЕЦЕМБАР 2019.

10:00 – 11:50, Свечана сала САНУ

10:00 – 10:15
<b>Отварање скупа:</b> <b>Зоран Ракић</b> , декан Математичког факултета Универзитета у Београду
10:15 – 10:50
<b>Miloš Arsenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Vladimir Božin</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Miljan Knežević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Marek Svetlik</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<i><a href="#">“Belgrade Complex Analysis Seminar - the Life and Work of Professor Miodrag Mateljević”</a></i>
10:50 – 11:05
Поздравне речи и обраћања гостију
11:05 – 11:50
<b>Vladimir Marković</b> , CalTech, USA
<i><a href="#">“Rigidity and geometry of Harmonic Maps”</a></i>

Пауза за кафу и освежење 11:50 – 12:15

12:15 – 13:30, Свечана сала САНУ

Председавајући: Зоран Петрић

12:15 – 12:45
<b>Академик Стеван Пилиповић</b> , председник програмског одбора Симпозијума <i>„Математичка прича – Миодраг Матељевић”</i>
12:45 – 13:30
<b>Dragomir Šarić</b> , Department of Mathematics, Queens College of CUNY
<i><a href="#">“Asymptotics of the modulus and the type of a Riemann surface”</a></i>

Пауза за кафу и освежење 13:30 – 13:50

13:50 – 15:20, Сала 2 САНУ

Председавајући: Милош Арсеновић

13:50 – 14:20
<b>Oleg Ivrii</b> , Wladimir Schreiber Institute of Mathematical Sciences, Tel Aviv University
<b><u><i>“Critical structures of inner functions”</i></u></b>
14:20 – 14:50
<b>Massimo Lanza de Cristoforis</b> , Dipartimento di “Matematica Tullio Levi-Civita” Universita degli Studi di Padova
<b><u><i>“A functional analytic approach to singular perturbation problems”</i></u></b>
14:50 – 15:20
<b>Melkana Brakalova-Trevithick</b> , Mathematics Department, Fordham University
<b><u><i>“Properties of the <math>p</math>-integrable subspaces of the universal Teichmüller space”</i></u></b>

Пауза за кафу и освежење 15:20 – 15:40

15:40 – 17:00, Сала 2 САНУ

Председавајући: Давид Калај

15:40 – 16:10
<b>Jouni Rättyä</b> , University of Eastern Finland, Department of Physics and Mathematics
<b><u><i>“Bergman projection induced by a radial weight”</i></u></b>
16:10 – 16:40
<b>Vladimir Božin</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<b><u><i>“Lyapunov domains and extremal problems in complex analysis and applications”</i></u></b>
16:40 – 17:00
<b>Miljan Knežević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Miodrag Mateljević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Marek Svetlik</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<b><u><i>“Schwarz-Pick type estimates for harmonic, HOR and HOC mappings”</i></u></b>

13:50 – 15:20, Сала 3 САНУ

Председавајући: Зорица Станимировић

13:50 – 14:20
<b>Zoran S. Pucanović</b> , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering <i><u><a href="#">“A new characterization of Suškevič’s problem on right zero divisors”</a></u></i>
14:20 – 14:50
<b>Ivana Jovović</b> , Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade <b>Tamara Koledin</b> , Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade <i><u><a href="#">“Multipliers and Symmetric Bi-multipliers on Bitonic Algebras”</a></u></i>
14:50 – 15:20
<b>Vladimir Jaćimović</b> , Faculty of Natural Science and Mathematics, University of Montenegro <i><u><a href="#">“Kuramoto models on spheres: geometry and invariant submanifolds”</a></u></i>

Пауза за кафу и освежење 15:20 – 15:40

15:40 – 17:00, Сала 3 САНУ

Председавајући: Драгана Илић

15:40 – 16:10
<b>Nikola Tuneski</b> , Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanical Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje <i><u><a href="#">“Study of a Mathematical Model of Market Surveillance Systems”</a></u></i>
16:10 – 16:40
<b>Milan Jovanović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Bojana Milošević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Marko Obradović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <i><u><a href="#">“Estimation of stress-strength parameter for multicomponent geometric model”</a></u></i>
16:40 – 17:00
<b>Goran Đanković</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Dragan Đokić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Nikola Lelas</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Ilija Vrećica</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <i><u><a href="#">“The fourth moment and large values of Dirichlet L-functions over rational function field”</a></u></i>

17:00 Коктел у клубу САНУ

## 2. ДАН, СУБОТА 7. ДЕЦЕМБАР 2019.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС  
10:00 – 17:20 САТИ, САЛА БИМ/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Миљан Кнежевић

10:00 – 10:40
<b>David Kalaj</b> , University of Montenegro
<a href="#"><u>“Muckenhoupt weights and a Lindelöf theorem for harmonic mappings”</u></a>
10:40 – 11:10
<b>Adel Khalfallah</b> , King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia
<a href="#"><u>“Linking Complex Analytic to Nonstandard Algebraic Geometry”</u></a>
11:10 – 11:40
<b>Милош Арсеновић</b> , Универзитет у Београду – Математички факултет <b>Драгољуб Ј. Кечкић</b> , Универзитет у Београду – Математички факултет
<a href="#"><u>„Оцене успона елементарних оператора”</u></a>
11:40 – 12:10
<b>Miloš Arsenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<a href="#"><u>“Invariance of quasilinearly subharmonic functions and papers devoted to the topic”</u></a>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: Драгољуб Кечкић

12:30 – 13:00
<b>Svjetlana Terzić</b> , University of Montenegro
<a href="#"><u>A new insight into <math>T^n</math>-action on the Grassmannians <math>G_{n,2}</math></u></a>
13:00 – 13:30
<b>Danko R. Jocić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Milan Lazarević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Stefan Milošević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<a href="#"><u>“Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators”</u></a>
13:30 – 13:50
<b>Miroslava Antić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<a href="#"><u>“Four-dimensional CR submanifolds of the six dimensional nearly Kähler manifolds”</u></a>
13:50 – 14:10
<b>Marijan Marković</b> , Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro
<a href="#"><u>“Riesz’s Theorem for Lumer’s Hardy Spaces”</u></a>
14:10 – 14:30
<b>Jelena Katić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Darko Milinković</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Jovana Nikolić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<a href="#"><u>“An obstruction and a construction in an ambient of the cotangent bundle”</u></a>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:20

Председавајући: Маријан Марковић

15:00 – 15:20
<b>Petar Melentijević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<i><u>“Khavinson problem for harmonic functions in the unit ball in <math>\mathbb{R}^3</math>”</u></i>
15:20 – 15:40
<b>Milutin Obradović</b> , Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
<b>Nikola Tuneski</b> , Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanical Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje
<i><u>“The Hankel determinant and other inequalities for certain classes of univalent functions”</u></i>
15:40 – 16:00
<b>Miloljub Albijanić</b> , FEFA
<b>Miloš Arsenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<b>Miljan Knežević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<i><u>“Academician Miodrag Mateljević - development of Belgrade mathematical school in teaching and science”</u></i>
16:00 – 16:20
<b>Zlatko Lazović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<i><u>“Measures of <math>\tau_M</math>-noncompactness in Hilbert <math>W^*</math>-modules”</u></i>
16:20 – 16:50
<b>Adam Lecko</b> , University of Warmia and Mazury in Olsztyn Faculty of Mathematics and Computer Science, Department of Complex Analysis
<i><u>“Blaschke products and classes of analytic functions”</u></i>



I SEKCIJA: MATEMATIKA I PRIMENE DANAS  
10:00 – 17:00 SATI, SALA 704/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Милан Дражић

10:00 – 10:30
Milojica Jaćimović, University of Montenegro, Department of Mathematics Nevena Mijajlović, University of Montenegro, Department of Mathematics
<u><a href="#">“Optimization and Variational Inequalities with Coupled Constraints”</a></u>
10:30 – 11:00
Biljana Jolevska-Tuneska, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Dept. of Mathematics and Physics
<u><a href="#">“Math, Art and Visualization”</a></u>
11:00 – 11:20
Aleksandra Rosić, Visoka škola strukovnih studija za informacione tehnologije Branko Malešević, Elektrotehnički fakultet Bojan Banjac, Fakultet tehničkih nauka
<u><a href="#">„Gröbner-ove baze i planarnost preseka dve algebarske površi”</a></u>
11:20 – 11:40
Milan M. Čugurović, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu Nikola Dimitrijević, Majkrosoft razvojni centar Srbija Stefan Mišković, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
<u><a href="#">“Modifikovani genetski algoritam za treniranje konvolutivnih neuronskih mreža”</a></u>
11:40 – 12:00
Danijela Branković, Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade Žarko Mijajlović, Faculty of Mathematics, University of Belgrade
<u><a href="#">“Smooth ER functions”</a></u>

Пауза за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: Александра Делић

12:30 – 12:50
Марко Пешовић, Грађевински факултет, Универзитет у Београду
<u><a href="#">„Хиперграфички политопи”</a></u>
12:50 – 13:10
Марија Цупарић, Универзитет у Београду – Математички факултет Бојана Милошевић, Универзитет у Београду – Математички факултет Јаков Ју. Никитин, Катедра за математику и механику, Државни универзитет у Санкт Петербургу, Русија Марко Обрадовић, Универзитет у Београду – Математички факултет
<u><a href="#">“Нови тестови ескопоненцијалности <math>\omega^2</math> типа”</a></u>
13:10 – 13:30
Biljana Radičić, Univerzitet Singidunum
<u><a href="#">“EP matrice”</a></u>
13:30 – 13:50
Вукашин Брковић, Универзитет у Београду – Факултет организационих наука Александра Делић, Универзитет у Београду – Математички факултет
<u><a href="#">“Решавање Штурм-Луувиловог проблема са изводом разломљеног реда методом коначних елемената”</a></u>

13:50 – 14:10
<b>Miloš Z. Petrović</b> , Faculty of Agriculture in Kruševac, University of Niš
<u><i>“Some recent results on diffeomorphisms of generalized Riemannian spaces and their generalizations”</i></u>
14:10 – 14:30
<b>Irma Zenunović</b> , Osnovna škola Pazar, Tuzla
<b>Elvir Čajić</b> , Osnovna škola Pazar, Tuzla
<u><i>„Diferencijalna geometrija površi primjenom Wolfram Mathematica”</i></u>

ПАУЗА за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:20

**Председавајући: Душан Онић**

15:00 – 15:20
<b>Nikola Perić</b> , Mozart
<u><i>„Izazovi primene blockchain tehnologije”</i></u>
15:20 – 15:40
<b>Ivana Milić Žitnik</b> , Astronomska opservatorija
<u><i>„Kretanje rezonantnih asteroida veoma malim brzinama Jarkovskog i njegov uticaj na oblik familije asteroida”</i></u>
15:40 – 16:00
<b>Јелена Тасић</b> , Универзитет у Београду – Математички факултет
<u><i>„Нумеричке методе за решавање сингуларно пертурбованих диференцијалних једначина”</i></u>
16:00 – 16:20
<b>Branko Sarić</b> , Visoka škola tehničkih strukovnih studija
<u><i>„Koncept totalne integrabilnosti”</i></u>

## II SEKCIJA: MATEMATIKA I INFORMATIKA U OBRAZOVANJU

10:00 – 16:20 САТИ, САЛА 706/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Мирослав Марић

10:00 – 11:00
<b>Филип Марић</b> , Математички факултет, Универзитет у Београду
<u><a href="#">„Корелација наставе информатике, математике и физике кроз програмски језик Пајтон”</a></u>
11:00 – 12:00
<b>Милан Јовановић</b> , Математички факултет, Универзитет у Београду
<u><a href="#">„Игре на срећу – математиком до победе?”</a></u>

Пауза за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:00

Председавајући: Небојша Икодиновић

12:30 – 13:10
<b>Миљан Кнежевић</b> , Математички факултет, Универзитет у Београду
<u><a href="#">„Примена Птоломејеве теореме”</a></u>
13:10 – 13:30
<b>Zvezdan Stojanović</b> , Evropski univerzitet Brčko distrikt <b>Elvir Čajić</b> , KSC Sveti Franjo Tuzla
<u><a href="#">„Matematičko modelovanje nastavnog procesa”</a></u>
13:30 – 13:50
<b>Младен Беговић</b> , Британска Интернационална Школа Аркадија Академија, Котор
<u><a href="#">„Тригонометрија у акустици”</a></u>
13:50 – 14:10
<b>Татјана Станковић</b> , ЕТШ „Никола Тесла” Панчево <b>Радица Каровић</b> , ОШ „Ослободиоци Београда” Београд
<u><a href="#">„Пројектна настава у математици – квиз Мост математике”</a></u>
14:10 – 14:30
<b>Дејан Вурдеља</b> , Прва економска школа, Београд
<u><a href="#">„Шангајски проблем”</a></u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 16:20

Председавајући: Владимир Кузмановић

15:00 – 15:20
<b>Радослав Божић</b> , Гимназија „Светозар Марковић” Нови Сад
<u><a href="#">„Примена образовног софтвера Геогбра у обради наставних садржаја из стереометрије”</a></u>

15:20 – 15:40
<b>Tatjana Šimak</b> , Osnovna škola „Maršal Tito”, Padina <b>Zoran Z. Petrović</b> , Univerzitet u Beogradu – Matematički fakultet
<b><u>„Dokazivanje nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije korišćenjem stepenih redova”</u></b>
15:40 – 16:00
<b>Татјана Станковић</b> , ЕТШ „Никола Тесла” Панчево
<b><u>„Калкулатор у настави математике – да, можда, не?”</u></b>
16:00 – 16:20
<b>Душица Марковић</b> , Основна школа „Стефан Немања” Ниш
<b><u>„Истраживачки пројекти у настави математике”</u></b>

### III SEKCIJA: NAUČNOISTRAŽIVAČKI I STRUČNI RAD STUDENATA

10:00 – 13:15 САТИ, САЛА 718

Први део: 10:00 – 13:15

Председавајући: Давид Цвекић, студент Математичког факултета Универзитета у Београду

10:00 – 10:15
<b>Miljan Đorđević</b> , Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade <b>Pavle Radojković</b> , Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade <b>Dragica Stojiljković</b> , Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade <u><a href="#">“Application of FPGA chip for high precision calculations”</a></u>
10:15 – 10:30
<b>Miloš Arsenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Tanja Jovanović</b> , Faculty of Sciences, University of Priština-Kosovska Mitrovica <u><a href="#">“Embeddings of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in <math>R^n</math>”</a></u>
10:30 – 10:45
<b>Iva Čvorović – Hajdinjak</b> , Univerzitet u Beogradu – Matematički fakultet <u><a href="#">„Modeli klasifikacije egzoplaneta prema potencijalnoj nastanjivosti dobijeni metodama mašinskog učenja”</a></u>
10:45 – 11:00
<b>Isidora Jankov</b> , Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade <b>Dragana Ilić</b> , Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade <u><a href="#">“Optical spectral parameters correlations in an SDSS sample of type 1 quasars”</a></u>
11:05 – 11:15
<b>Данијел Алексић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <u><a href="#">„Однос висине хомогеног новчића и вероватноће пада на ивицу”</a></u>
11:20 – 11:30
<b>Александра Здравковић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <b>Коста Љујић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <u><a href="#">„Поређење методе момената и методе максималне веродостојности на примеру померене експоненцијалне расподеле”</a></u>
11:35 – 11:45
<b>Лазар Васовић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <u><a href="#">„GeoDemonstrator”</a></u>
11:50 – 12:00
<b>Dejan Kovač</b> , student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu <u><a href="#">„Integralna kriptoanaliza AES-a sa tajnim S-Box-om - teorija i implementacija”</a></u>
12:05 – 12:15
<b>Милена Стојић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <b>Дуња Спасић</b> , студент Математичког факултета Универзитета у Београду <u><a href="#">„Сафир: Употреба линеарних трансформација као додаток за 3D софтвер SketchUp”</a></u>
12:20 – 12:30
<b>Aleksandar Mladenović</b> , student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu <b>Vladimir Mandić</b> , student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu <u><a href="#">„Primena kvantne Furijeove transformacije u programskom jeziku Python”</a></u>
12:35 – 12:45
<b>Nikola Velov</b> , student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu <u><a href="#">„O broju nizova jedinstvene vrednosti maksimalne dužine u polugrupi matričnih jedinica”</a></u>

12:50 – 13:00

**Lea Petković**, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

**Bojana Ristanović**, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

**Nikola Stamenić**, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

„*CyExpress*”

13:05 – 13:15

**Nikola Ubavić**, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

„*Žulijev i Mandelbrotoov skup*”

## САДРЖАЈ

<b>Miloš Arsenović, Vladimir Božin, Miljan Knežević, Marek Svetlik</b> Belgrade Complex Analysis Seminar - the life and work of Professor Miodrag Mateljević . . . . .	1
<b>Vladimir Marković</b> Rigidity and geometry of Harmonic Maps . . . . .	2
<b>Dragomir Šarić</b> Asymptotics of the modulus and the type of a Riemann surface . . . . .	2
<b>Oleg Irvii</b> Critical structures of inner functions . . . . .	3
<b>Massimo Lanza de Cristoforis</b> A functional analytic approach to singular perturbation problems . . . . .	3
<b>Melkana Brakalova–Trevithick</b> Properties of the $p$ -integrable subspaces of the universal Teichmüller space . . . . .	4
<b>Jouni Rättyä</b> Bergman projection induced by a radial weight . . . . .	4
<b>Vladimir Božin</b> Lyapunov domains and extremal problems in complex analysis and applications . . . . .	5
<b>Miljan Knežević, Miodrag Mateljević, Marek Svetlik</b> Schwarz-Pick type estimates for harmonic, HQR and HQC mappings . . . . .	5
<b>Zoran S. Pucanović</b> A new characterization of Suškevič's problem on right zero divisors . . . . .	6
<b>Ivan Jovović, Tamara Koledin</b> Multipliers and Symmetric Bi-multipliers on Bitonic Algebras . . . . .	6
<b>Vladimir Jaćimović</b> Kuramoto models on spheres: geometry and invariant submanifolds . . . . .	7
<b>Nikola Tuneski</b> Study of a Mathematical Model of Market Surveillance Systems . . . . .	7
<b>Milan Jovanović, Bojana Milošević, Marko Obadović</b> Estimation of stress-strength parameter for multicomponent geometric model . . . . .	8
<b>Goran Đanković, Dragan Đokić, Nikola Lelas, Ilija Vrećica</b> The fourth moment and large values of Dirichlet $L$ -functions over rational function fields . . . . .	9
<b>David Kalaj</b> Muckenhoupt weights and a Lindelöf theorem for harmonic mappings . . . . .	10
<b>Adel Khalfallah</b> Linking Complex Analytic to Nonstandard Algebraic Geometry . . . . .	10
<b>Милош Арсеновић, Драгољуб Кечкић</b> Оцене успона елементарних оператора . . . . .	11
<b>Miloš Arsenović</b> Invariance of quasilinearly subharmonic functions and papers devoted to the topic . . . . .	11
<b>Svjetlana Terzić</b> A new insight into $T^n$ -action on the Grassmannians $G_{n,2}$ . . . . .	12

<b>Danko R. Jocić, Milan Lazarević, Stefan Milošević</b> Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators . . . . .	12
<b>Miroslava Antić</b> Four-dimensional CR submanifolds of the six dimensional nearly Kähler manifolds . . . . .	13
<b>Marijan Marković</b> Riesz's Theorem for Lumer's Hardy Spaces . . . . .	14
<b>Jelena Katić, Darko Milinković, Jovana Nikolić</b> An obstruction and a construction in an ambient of the cotangent bundle . . . . .	14
<b>Petar Melentijević</b> Khavinson problem for harmonic functions in the unit ball in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
<b>Milutin Obradović, Nikola Tuneski</b> The Hankel determinant and other inequalities for certain classes of univalent functions . . . . .	15
<b>Miloljub Albijanić, Miloš Arsenović, Miljan Knežević</b> Academician Miodrag Mateljević - development of Belgrade mathematical school in teaching and science . . . . .	16
<b>Zlatko Lazović</b> Measures of $\tau_M$ -noncompactness in Hilbert $W^*$ -modules . . . . .	17
<b>Milojica Jaćimović, Nevena Mijajlović</b> Optimization and Variational Inequalities with Coupled Constraints . . . . .	18
<b>Biljana Jolevska-Tuneska</b> Math, Art and Visualization . . . . .	18
<b>Aleksandra Rosić, Branko Malešević, Bojan Banjac</b> Gröbner-ove baze i planarnost preseka dve algebarske površi . . . . .	19
<b>Milan M. Čugurović, Nikola Dimitrijević, Stefan Mišković</b> Modifikovani genetski algoritam za treniranje konvolutivnih neuronskih mreža . . . . .	20
<b>Danijela Branković, Žarko Mijajlović</b> Smooth ER functions . . . . .	21
<b>Марко Пешовић</b> Хиперграфички политопи . . . . .	21
<b>Марија Цупарић, Бојана Милошевић, Јаков Ју. Никитин, Марко Обрадовић</b> Нови тестови експоненцијалности $\omega^2$ типа . . . . .	22
<b>Biljana Radičić</b> EP matrice . . . . .	22
<b>Вукашин Брковић, Александра Делић</b> Решавање Штурм-Лиувиловог проблема са изводом разломљеног реда методом коначних елемената . . . . .	23
<b>Miloš Z. Petrović</b> Some recent results on diffeomorphisms of generalized Riemannian spaces and their generalizations . . . . .	24
<b>Nikola Perić</b> Izazovi primene blockchain tehnologije . . . . .	24



<b>Ivana Milić Žitnik</b> Kretanje rezonantnih asteroida veoma malim brzinama Jarkovskog i njegov uticaj na oblik familije asteroida .....	25
<b>Јелена Тасић</b> Нумеричке методе за решавање сингуларно пертурбованих диференцијалних једначина .....	26
<b>Вранко Сарић</b> Koncept totalne integrabilnosti .....	26
<b>Филип Марић</b> Корелација наставе информатике, математике и физике кроз програмски језик Пајтон .....	27
<b>Милан Јовановић</b> Игре на срећу - математиком до победе? .....	28
<b>Миљан Кнежевић</b> Примена Птолемејеве теореме .....	28
<b>Zvezdan Stojanović, Elvir Čajić</b> Matematičko modelovanje nastavnog procesa .....	28
<b>Младен Беговић</b> Тригонометрија у акустици .....	29
<b>Татјана Станковић, Радица Каровић</b> Пројектна настава у математици-квиз „Мост математике” .....	30
<b>Дејан Вурдеља</b> Шангајски проблем .....	30
<b>Радослав Божић</b> Примена образовног софтвера Геогebra у обради наставних садржаја из стереометрије .....	31
<b>Tatjana Šimak, Zoran Z. Petrović</b> Dokazivanje nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije korišćenjem stepenih redova .....	32
<b>Татјана Станковић</b> Калкулатор у настави математике-да, можда, не? .....	33
<b>Душица Марковић</b> Истраживачки пројекти у настави математике .....	33
<b>Miljan Đorđević, Pavle Radojković, Dragica Stojiljković</b> Application of FPGA chip for high precision calculations .....	34
<b>Miloš Arsenović, Tanja Jovanović</b> Embeddings of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in $\mathbb{R}^n$ .....	34
<b>Iva Čvorović – Hajdinjak</b> Modeli klasifikacije egzoplaneta prema potencijalnoj nastanjivosti dobijeni metodama mašinskog učenja .....	35
<b>Isidora Jankov, Dragana Ilić</b> Optical spectral parameters correlations in an SDSS sample of type 1 quasars .....	37
<b>Данијел Алексић</b> Однос висине хомогеног новчића и вероватноће пада на ивицу .....	37

<b>Александра Здравковић, Коста Љујић</b> Поређење методе момената и методе максималне веродостојности на примеру померене експоненцијалне расподеле.....	38
<b>Лазар Васовић</b> GeoDemonstrator.....	38
<b>Дејан Коваћ</b> Integralna kriptoanaliza AES-a sa tajnim S-Box-om - teorija i implementacija.....	39
<b>Милена Стојић, Дуња Спасић</b> Сафир: Употреба линеарних трансформација као додатак за 3D софтвер SketchUp.....	40
<b>Aleksandar Mladenović, Vladimir Mandić</b> Primena kvantne Furijeove transformacije u programskom jeziku Python .....	40
<b>Nikola Velov</b> O broju nizova jedinstvene vrednosti maksimalne dužine u polugrupi matičnih jedinica .....	41
<b>Lea Petković, Vojana Ristanović, Nikola Stamenić</b> CvExpress .....	42
<b>Nikola Ubavić</b> Žulijev i Mandelbrotoov skup .....	42

## Belgrade Complex Analysis Seminar - the life and work of Professor Miodrag Mateljević

**Miloš Arsenović**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

**Vladimir Božin**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: bozin@turing.mi.sanu.ac.rs*

**Miljan Knežević**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs*

**Marek Svetlik**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In the mid 1990s, despite of the difficult circumstances, Belgrade was thriving with mathematical activity. These seminal days are remembered fondly, and we dig deeper into the origins and role played by the Belgrade Complex Analysis seminar from those consequential times.

In this short time interval we will try to capture the most beautiful and interesting moments we spent at the Seminar led by prof. Miodrag Mateljević. We are aware that it would essentially take us an eternity to describe in brief the shared memories and achievements we have lived. Thanks to such a great man, scientist and professor, many of us are now where they are.

**Keywords:** Complex Analysis; Miodrag Mateljević

### References

- [1] **M. Mateljević.** On linked Jordan curves in  $R^3$ . *Mat. Vesnik* 12 (27) (1975), 285-286.
- [2] **M. Mateljević, M. Pavlović.**  $L^p$ -behavior of power series with positive coefficients and Hardy Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 87 No.2 (1983), 309-316.
- [3] **M. Mateljević, M. Pavlović.**  $L^p$ -behaviour of the integral means of analytic functions, *Studia Mathematica* Vol. 77 (1983), 219-237.
- [4] **M. Mateljević, M. Pavlović.** Multipliers of  $H^1$  and BMOA. *Pacific Journal of Mathematics* 146 (1990), 71-84.
- [5] **V. Božin, N. Lakić, V. Marković, M. Mateljević.** The unique extremality. *Journal d'Analyse* 75 (1998), 299-338.
- [6] **D. Kalaj, M. Mateljević.** Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains, *J. d'Analyse Mathématique* Vol.100 (2006), 117-132.
- [7] **M. Knežević, M. Mateljević.** On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings, *J. Math. Anal. Appl.* Vol 334, No 1, 2007, 404-413.
- [8] **M. Mateljević.** Quasiconformal and Quasiregular harmonic analogues of Koebe's theorem and applications, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, Vol 32, No 2, 2007, 301-315.
- [9] **M. Mateljević, V. Božin, M. Knežević.** Quasiconformality of Harmonic Mappings Between Jordan Domains, *Filomat*, Vol 24, No 3, 2010, 111-124.
- [10] **M. Mateljević.** Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

- [11] **A. Abaob, M. Arsenović, M. Mateljević, A. Shkheam.** Moduli of Continuity of Harmonic Quasiregular Mappings on Bounded Domains, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, Volumen 38, 2013, 839-847.
- [12] **M. Mateljević.** Fragmenati sećanja na kompleksnu analizu u Beogradu (1968-1980) i Vojina Dajovića - Izoperimetrijska nejednakost, Hardy-jevi prostori i Fourier-ovi redovi, Zbornik radova, Četvrti simpozijum „Matematika i primene”, Matematički fakultet, 24-25.05.2013, Beograd 2014.
- [13] **M. Mateljević.** The Growth of Gradients of Solutions of Some Elliptic Equations and Bi-Lipschicity of QCH, *Filomat* 31:10 (2017), 3023-3034.
- [14] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018) 78-100.
- [15] **M. Mateljević, M. Svetlik.** Hyperbolic Metric on the Strip and the Schwarz Lemma for HQR Mappings (arXiv: 1808.06647v1).

---

## Rigidity and geometry of Harmonic Maps

**Vladimir Marković**

*CalTech, USA*

*e-mail: markovic@caltech.edu*

**Abstract.** Harmonic maps play a prominent role in geometry. I will explain some of these applications including Siu's rigidity of negatively curved Kahler manifolds, as well as my recent result about the existence and uniqueness of harmonic maps between hyperbolic spaces (the proof of the Schoen conjecture).

**Keywords:** Harmonic maps; Schoen conjecture.

---

## Asymptotics of the modulus and the type of a Riemann surface

**Dragomir Šarić**

*Department of Mathematics, Queens College of CUNY, 65-30 Kissena Blvd., Flushing, NY 11367*

*Mathematics Ph.D. Program, The CUNY Graduate Center, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016-4309*

*e-mail: dragomir.saric@qc.cuny.edu*

**Abstract.** We consider the asymptotic behavior of the modulus of curves connecting graphs of two functions in the complex plane when the distance between the graphs goes to zero. We prove that the asymptotic value is the modulus of the vertical family of curves connecting the graphs. One application of this phenomenon is finding limit points of Teichmüller geodesics on the Thurston boundary of the universal Teichmüller space. We discuss another application which concerns determining whether a given Riemann surface is of parabolic type.

A Riemann surface is of parabolic type if it does not have a Green's function. We parametrize the space of all Riemann surfaces by Fenchel-Nielsen parameters for a pants decomposition—each cuff of a geodesic pair of pants has a length and twist parameter. We give explicit conditions on the length and twist parameters that guarantee the Riemann surface is parabolic. This is a joint work with A. Basmajian and H. Hakobyan.

**Keywords:** modulus of curves, Fenchel-Nielsen coordinates, parabolic Riemann surface; extremal distance, type problem; Teichmüller space, Thurston boundary.

## References

- [1] **F. Bonahon and D. Šarić.** A Thurston boundary for infinite-dimensional Teichmüller spaces. Preprint. ArXiv:1805.05997.

- [2] **H. Hakobyan and D. Šarić.** Limits of Teichmüller geodesics in the universal Teichmüller space, *Proc. London Math. Soc.* (3) 166 (2018), no. 6, 1599-1628.
  - [3] **A. Basmajian, H. Hakobyan and D. Šarić.** Parabolic type and the geodesic flow on infinite Riemann surfaces, in preparation.
- 

## Critical structures of inner functions

**Oleg Ivrii**

*Wladimir Schreiber Institute of Mathematical Sciences, Tel Aviv University*  
*e-mail: ivrii@tauex.tau.ac.il*

**Abstract.** A finite Blaschke product may be described as a proper holomorphic self-map of the disk. Typically, one studies Blaschke products by looking at the locations of their zeros. In this talk, we take a less travelled route and examine Blaschke products by looking at their critical points. Our starting point is a celebrated theorem of Heins which says that given any finite set of points in the unit disk, there exists an essentially unique finite Blaschke product which has that set as its critical set. Our aim is to extend this result to infinite degree in the context of inner functions. I will first explain how to parametrize inner functions  $F$  of finite entropy (i.e. which have derivative in the Nevanlinna class) in terms of  $\text{Inn } F'$ . The answer involves measures on the unit circle that do not charge Beurling-Carleson sets. Afterwards, I will discuss how one might parametrize arbitrary inner functions using 1-generated invariant subspaces of the weighted Bergman space  $A_1^2$ . The proofs rely on the Liouville correspondence which provides a bridge between complex analysis and non-linear elliptic PDE.

**Keywords:** Blaschke product; critical set; Gauss curvature equation; Bergman space.

### References

- [1] **O. Ivrii.** Prescribing inner parts of derivatives of inner functions. *Journal d'Analyse Mathématique* (to appear).
  - [2] **O. Ivrii.** Stable convergence of inner functions. *Submitted*.
  - [3] **O. Ivrii.** Critical structures of inner functions. *In progress*.
- 

## A functional analytic approach to singular perturbation problems

**Massimo Lanza de Cristoforis**

*Dipartimento di Matematica 'Tullio Levi-Civita'*  
*Università degli Studi di Padova, Via Trieste 63, Padova 35121, Italy. e-mail: mldc@math.unipd.it*

**Abstract.** This talk is dedicated to the analysis of singularly perturbed problems on singularly perturbed domains by an approach which is alternative to those of asymptotic analysis, and has an expository character.

In particular, we will consider some specific problems depending on a positive parameter  $\epsilon$  and we will consider a family of solutions depending on  $\epsilon$  as  $\epsilon$  approaches 0. Then we shall represent the dependence on  $\epsilon$  of the family of solutions, or of corresponding functionals of the solutions in terms of possibly singular at 0 but known functions of  $\epsilon$  such as  $\epsilon^{-1}$  or  $\log \epsilon$ , and in terms of possibly unknown real analytic operators.

**Keywords:** Perforated domains; singular perturbation; asymptotic behaviour.

---

## Properties of the $p$ -integrable subspaces of the universal Teichmüller space

Melkana Brakalova-Trevithick

Mathematics Department, Fordham University, Bronx, NY 10458  
e-mail: brakalova@fordham.edu

**Abstract.** One of many equivalent definitions of the universal Teichmüller space  $\mathcal{T}$  is of the set of all quasymmetric mappings of the unit circle  $S^1$  that fix 1,  $i$  and  $-1$ . One denotes by  $\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}$  the subspace of the symmetric mappings of  $S^1$ . For  $p > 0$ , we denote by  $\mathcal{T}^p$  the subset of those elements of  $\mathcal{T}$ , which admit a quasiconformal extension in the unit disk  $\mathbb{D}$  such that its Beltrami coefficient is in  $L^p(\mathbb{D}, d\sigma)$ , where  $d\sigma$  is the Poincaré measure on  $\mathbb{D}$ . We call the space  $\mathcal{T}^p$  the  $p$ -integrable Teichmüller space. The space  $\mathcal{T}^2$ , known also as the Weil–Peterson Teichmüller space has been extensively studied and the  $\mathcal{T}^p$ -spaces were introduced for all  $p \geq 2$  in [1]. In [2], the definition was extended to  $p > 0$  where, using geometric properties of q.c. maps, it was shown that for all  $p > 0$ ,  $\mathcal{T}^p \subset \mathcal{T}_s$ .

We recall that there exists a metric on  $\mathcal{T}$  called the Teichmüller distance that we denote by  $d_{\mathcal{T}}$ . The universal Teichmüller space endowed with the Teichmüller metric is a geodesic space, but not uniquely geodesic. It is also known that  $\mathcal{T}_s$  is a geodesic space [3] but it is not known if it is uniquely geodesic, and that  $\mathcal{T}^p$  is a length space [4], for  $p \geq 2$ .

In this talk we discuss smoothness and length properties of the elements of the  $p$ -integrable Teichmüller spaces for  $0 < p \leq 1$ , and state open questions. This work is joint with V. Alberge.

**Keywords:** universal, symmetric, and  $p$ -integrable Teichmüller spaces; quasiconformal, quasymmetric and symmetric mappings.

### References

- [1] H. Guo, Integrable Teichmüller spaces. *Sci. China Ser. A.* 43 (2000), 47–58.
- [2] M. Brakalova, Symmetric properties of  $p$ -integrable Teichmüller spaces. *Analysis and Mathematical Physics*, Springer Verlag, 8 2018, pp 541–549.
- [3] C. J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, Asymptotic Teichmüller space. II. The metric structure. In *In the Tradition of Ahlfors and Bers, III* (W. Abikoff and A. Haas, eds.), Contemporary Mathematics 355, American Mathematical Society, Providence 2004, 187–219.
- [4] M. Yanagishita, Teichmüller distance and Kobayashi distance on subspaces of the universal Teichmüller spaces. *Kodai Math. J.* 36 (2013), 209–227.

---

## Bergman projection induced by a radial weight

Jouni Rättyä

University of Eastern Finland, Department of Physics and Mathematics, Finland  
e-mail: jouni.rattya@uef.fi

**Abstract.** We consider the question of when the Bergman projection induced by a radial weight is bounded between Lebesgue spaces induced by the same weight.

## Lyapunov domains and extremal problems in complex analysis and applications

**Vladimir Božin**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*  
*e-mail: bozinu@turing.mi.sanu.ac.rs*

**Abstract.** A fruitful collaboration with Miodrag Mateljević, spanning over more than two decades, has included topics ranging from complex analysis to applied mathematics. In particular, we will discuss some recent results in quasiconformal harmonic maps in more detail.

---

## Schwarz-Pick type estimates for harmonic, HQR and HQC mappings

**Miljan Knežević**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*  
*e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs*

**Miodrag Mateljević**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*  
*e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

**Marek Svetlik**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*  
*e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In this talk we give a short overview of some our results related to generalizations of the Schwarz lemma and the Schwarz-Pick lemma for harmonic, HQR and HQC mappings. In particular, we consider versions of the Schwarz lemma for harmonic functions on the unit disk, whereby values of such functions and the norms of their differentials at the point  $z = 0$  are given.

**Keywords:** Harmonic functions; the Schwarz lemma; the Schwarz-Pick lemma.

### References

- [1] **M. Knežević, M. Mateljević.** On the quasi-isometries of harmonic quasi-conformal mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 334(1), 404-413.
  - [2] **M. Knežević.** A Note on the Harmonic Quasiconformal Diffeomorphisms of the Unit Disc. *Filomat* 29:2 (2015), 335-341.
  - [3] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018) 78-100.
  - [4] **M. Mateljević, M. Svetlik.** Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings. arXiv:1808.06647v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1808.06647>
  - [5] **M. Svetlik.** A note on the Schwarz lemma for harmonic functions. arXiv:1911.03589v1 [math.CV], <http://arxiv.org/abs/1911.03589>
-

## A new characterization of Suškevič's problem on right zero divisors

**Zoran S. Pucanović**

*University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Bulevar kralja Aleksandra 73  
e-mail: pucanovic@grf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In [ 3] (1950) Suškevič posed the following problem:

*Describe all right zero divisors in the ring of infinite upper triangular matrices over a field.*

It turns out that the description of right zero divisors in that ring is a very difficult problem that has not been resolved yet. There are some partial answers to this question and one nice reformulation of this problem can be found in [ 1].

In [ 2] the authors have proved that every infinite upper triangular matrix over an arbitrary field has a generalized infinite Jordan normal form. Based on this fact, we will prove the following characterization: An infinite upper triangular matrix over a field is a right zero divisor if and only if its generalized Jordan normal form contains a zero row.

**Keywords:** Zero divisors; Infinite upper triangular matrices; Generalized Jordan normal form.

### References

- [1] **W. Holubowski, M. Maciaszczyk, S. Žurek.** Note on Suškevič's problem on zero divisors. *Comm. algebra*, 2017, 45(8) pp. 3274 - 3277.
  - [2] **A. Kostić, Z. Petrović, Z. Pucanović, M. Roslavcev.** On a Generalized Jordan Form of an Infinite Upper Triangular Matrix. *Linear Multilinear Algebra*, 2019, Online first, DOI: 10.1080/03081087, 9p.
  - [3] **A. K. Suškevič.** On an infinite algebra of triangular matrices. *Harkov. Gos. Univ. Usc. Zap. 34 = Zap. Mat. Otd. Fiz.-Mat. Fak. i Harkov. Mat. Obsc.*, 1950, 22:77-93. (in Russian).
- 

## Multipliers and Symmetric Bi-multipliers on Bitonic Algebras

**Ivana Jovović**

*Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade  
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: ivana@etf.rs*

**Tamara Koledin**

*Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade  
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: tamara@etf.rs*

**Abstract.** In this paper, we investigate some properties of multipliers and symmetric bi-multipliers on bitonic algebras. Kernel and fixed set of multipliers and symmetric bi-multipliers are also considered.

**Keywords:** bitonic algebras; multipliers; symmetric bi-multipliers.

---



## Kuramoto models on spheres: geometry and invariant submanifolds

Vladimir Jaćimović

*Faculty of Natural Science and Mathematics, University of Montenegro  
Cetinjski put 2, 81000 Podgorica, Montenegro  
e-mail: vladimirj@ucg.ac.me*

**Abstract.** The tendency of coupled oscillators to synchronize their oscillations is a fascinating phenomenon with a great variety of manifestations in Nature and applications in Engineering.

The most popular mathematical model of coupled oscillators has been introduced by Yoshiki Kuramoto in 1975, see [1]. This model serves as a paradigm for study of phase transitions and synchronization in large ensembles of coupled oscillators.

Recently, motivated by potential applications in Physics, Mathematical Biology, Mathematical Sociology, Robotics and Artificial Intelligence, several researchers introduced various extensions of the classical Kuramoto models to higher-dimensional manifolds.

The present talk is devoted to recent geometric and group-theoretic insights into the classical Kuramoto model ([2]) and its extensions ([3]). Geometries of unit balls associated with Kuramoto models are discussed.

I also briefly address some intriguing relations with the notion of coherent states in Mathematical Physics. Finally, I point out some applications in Mathematics and beyond.

**Keywords:** Kuramoto model; ball; hyperbolic geometry; conformal mappings, coherent states.

### References

- [1] **Y. Kuramoto.** Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. *In: H. Araki (Ed.) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Springer Berlin Heidelberg, 1975*, pp. 420 - 422.
- [2] **S. A. Marvel, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz.** Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2009, 19 (4), 043104.
- [3] **M. Lipton, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz.** On Higher-Dimensional Generalized Kuramoto Oscillator Systems. *arXiv*, 2019, 1907.07150.

---

## Study of a Mathematical Model of Market Surveillance Systems

Nikola Tuneski

*Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanical Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Karpoš II b.b., 1000 Skopje, Republic of North Macedonia  
e-mail: nikola.tuneski@mf.edu.mk*

**Abstract.** A dynamic mathematical model of a market surveillance system is presented that takes into account the three most relevant actors: the market surveillance authority, the consumers (users of the products) and the economic operators; satisfactory indices for each of them are defined, together with a set of action rules when the value of the index is below or above some (predefined) limiting value. Afterwards, computer simulation is done for a real case, the results are studied and adequate conclusions are drawn.

**Keywords:** mathematical model, market surveillance, satisfactory indices, simulation.

### References

- [1] **I. Hendriks, B.D. Jovanoski, N. Tuneski.** Dynamic simulations of market surveillance actions, *2016 IEEE Symposium on Product Compliance Engineering (ISPC)*, 16-18 May 2016, Anaheim, CA, USA. DOI: 10.1109/ISPC.2016.7492846
  - [2] **UNECE Working Party on Regulatory Cooperation and Standardization Policies. (2009).** Draft guide to the use of the general market surveillance procedure, [Online]. Available: <http://www.unece.org/fileadmin/DAM/trade/wpp6/СекторалИнициативес/МАРС/СловакиаЪОцт09/ГМСПЗ.пдф>
  - [3] **UNECE Working Party on Technical Harmonization and Standardization Policies. (2001).** Recommendations on regulatory cooperation and standardization policies. International Model for Technical Harmonization Based on Good Regulatory Practice for the Preparation, Adoption and Application of Technical Regulations via the Use of International Standards. [Online] Available: <http://www.unece.org/fileadmin/DAM/trade/wpp6/Рекомендационс/РецЪЛ.пдф>.
- 

## Estimation of stress-strength parameter for multicomponent geometric model

**Milan Jovanović**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: mjovanovic@matf.bg.ac.rs*

**Bojana Milošević**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

**Marko Obradović**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: marcone@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** This paper deals with the estimation of  $R_{s,k} = P\{\text{at least } s \text{ of the } (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \geq X\}$ , where  $X$  and  $Y_i$  are independent random variables from geometric distribution. The MLE, UMVUE and Bayes point estimator, as well as asymptotic and bootstrap confidence intervals are presented. The methods are applied to a real data example.

**Keywords:** multicomponent stress-strength; reliability; geometric distribution.

### References

- [1] **F. Kizilaslan.** Classical and Bayesian estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a general class of inverse exponentiated distributions. *Statistical Papers*, 2018, 59(3), 1161 - 1192.
  - [2] **S.S. Maiti.** Estimation of  $P(X \leq Y)$  in the geometric case. *Journal of the Indian Statistical Association*, 1995, 33(2), 87 - 91.
-

## The fourth moment and large values of Dirichlet $L$ -functions over rational function fields

**Goran Danković**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: djankovic@matf.bg.ac.rs*

**Dragan Đokić**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: dragan@matf.bg.ac.rs*

**Nikola Lelas**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: dzoni@matf.bg.ac.rs*

**Ilija Vrećica**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: ilijav@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We establish the existence of large values of Dirichlet  $L$ -functions in the family of non-principal characters associated to prime polynomials  $Q$  over finite field  $\mathbb{F}_q$ , as  $\deg Q \rightarrow \infty$ , and  $s \in (1/2, 1]$ . When  $s = 1$ , we provide a lower bound for the number of such characters. To do this, we adapt the resonance method to the function field setting. We also investigate this problem at the central point  $|L(1/2, \chi)|$ , where now  $\chi$  varies over even, non-principal, Dirichlet characters associated to prime polynomials  $Q$  over  $\mathbb{F}_q$ , as  $\deg Q \rightarrow \infty$ . In addition to resonance method, in this case we use an adaptation of Gál type sums estimate.

N. Tamam considered the fourth moment of  $L$ -functions, in central point:  $\frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1/2, \chi)|^4$ , as  $\deg Q \rightarrow \infty$ , and established a partial main term, with only the leading order summand. In order to obtain the full main term, with all lower order summands, we consider the fourth moment additionally averaged over the critical circle:

$$\frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\chi \pmod{Q}} \frac{1}{\log q} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^4 dt.$$

The obtained asymptotic formula is in agreement with the existing conjectures for integral moments of  $L$ -functions in families.

**Keywords:** Dirichlet  $L$ -functions; function fields; resonance method; Gál's sums.

### References

- [1] **D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica.** On large values of Dirichlet  $L$ -functions over function fields. *International Journal of Number Theory*, submitted, 30 pg.
  - [2] **N. Tamam.** The fourth moment of Dirichlet  $L$ -functions for the rational function field, *International Journal of Number Theory*, 2014, 10(1), 183 - 218.
  - [3] **G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica.** The integrated fourth moment of Dirichlet  $L$ -functions over rational function fields. Manuscript, 26 pg.
-

## Muckenhoupt weights and a Lindelöf theorem for harmonic mappings

David Kalaj

University of Montenegro, Džordža Vašingtona bb, Podgorica  
e-mail: davidk@ac.me

**Abstract.** We extend the result of Lavrentiev which asserts that the harmonic measure and the arc-length measure are  $A_\infty$  equivalent in a chord-arc Jordan domain. By using this result we extend the classical result of Lindelöf to the class of quasiconformal (q.c.) harmonic mappings by proving the following assertion. Assume that  $f$  is a quasiconformal harmonic mapping of the unit disk  $\mathbf{U}$  onto a Jordan domain. Then the function  $A(z) = \arg(\partial_\varphi(f(z))/z)$  where  $z = re^{i\varphi}$ , is well-defined and smooth in  $\mathbf{U}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$  and has a continuous extension to the boundary of the unit disk if and only if the image domain has  $C^1$  boundary.

---

## Linking Complex Analytic to Nonstandard Algebraic Geometry

Adel Khalfallah

King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia  
e-mail: adel.khalfallah@gmail.com

**Abstract.** The value of nonstandard mathematics is in serving as a "guiding star" and often offering a conceptually simple and elegant interpretation and generalization of classical theory and sometimes leads to new concrete standard results.

Not so much is known about nonstandard complex analysis, unlike nonstandard real analysis, topology and metric spaces theory. Only some very specific applications of model theory are used to be known as for instance the Lefschetz principle, the theorem of Tarski-Seidenberg or some simple proofs of Hilbert's Nullstellensatz.

Recently, in collaboration with S. Kosarew, we started a program to develop a theory of analytic geometry using nonstandard methods. One of our fundamental constructions is that of a category of certain ringed spaces, called *боундед счемес*, which contains the category of algebraic  $\mathbb{C}$ -schemes and which admits an essentially surjective functor, called the standard part functor, to the category of complex spaces. The advantage of this new more algebraic category is that it allows us to apply many constructions of standard algebraic geometry which are not evident in the analytic context. We obtain analytic results just by taking the standard part functor.

**Keywords:** Nonstandard analysis; Bounded schemes; internal polynomials.

### References

- [1] **A. Khalfallah and S. Kosarew** Complex spaces and nonstandard schemes. *J. Logic and Analysis*, 2010, paper 9 pp. 1-60
  - [2] **A. Khalfallah**, New Nonstandard topologies, *Monatsh Math.*, 2013, 172, no. 3-4, 323-344
  - [3] **A. Khalfallah and S. Kosarew** Bounded polynomials and holomorphic mappings between convex subrings of  $^*C$  *The Journal of Symbolic Logic*, 2018, Volume 83, Issue 1, pp. 372-384
  - [4] **A. Khalfallah and S. Kosarew** Examples of new nonstandard hulls of topological vector spaces *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2018, 146, 2723-2739
-

## Оцене успона елементарних оператора

Милош Арсеновић

Математички факултет, Београд  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs

Драгољуб Ј. Кечкић

Математички факултет, Београд  
e-mail: keckic@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Елементарни оператори су оператори облика  $x \mapsto E(x) = \sum_{j=1}^n a_j x b_j$  на некој унитарној Банаховој алгебри. Успон оператора  $E$  је најмањи природан број  $n$  такав да се језгра оператора  $E^n$  и  $E^{n+1}$  поклапају. Оцена успона елементарних оператора може се извести на основу неких резултата теорије функција. Конкретно, ако су  $a_j, b_j$  тзв. уопштени скаларни оператори поредака  $s$ , односно  $r$ , тада се успон, под одређеним условима, може оценити бројем  $[s + r + c/2] + 1$ , где је  $c$  димензија производа спектра  $\sigma(a_1, \dots, a_n) \times \sigma(b_1, \dots, b_n)$ .

**Кључне речи:** Банахове алгебре, елементарни оператори, Фаглид-Патнемова теорема, Фуријеова трансформација.

## Библиографија

- [1] Miloš Arsenović and Dragoljub Kečkić. Elementary operators on Banach algebras and Fourier transform. *Studia Math.*, 2006, 173-2, 149 - 166.
- 

## Invariance of quasilinearly subharmonic functions and papers devoted to the topic

Miloš Arsenović

Department of Mathematics, University of Belgrade, Serbia  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs

**Abstract.** We present results on invariance of quasilinearly subharmonic functions under quasiconformal change of variables published in papers by V. Todorčević, P. Koskela, J. Riihenta and O. Dovgoshey. Analogous results on regularly oscillating functions are also discussed. We analyse an unusual paper on the same topic, which is a compilation of two previously published articles by the same author (one in collaboration with P. Koskela). We present how unexpected problems arise when two papers are copied into a single one.

**Keywords:** quasiconformal mappings; quasilinearly subharmonic functions; regularly oscillating functions.

## References

- [1] Dovgoshey, O., Riihenta, J. Bi-Lipschitz mappings and quasilinearly subharmonic functions. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2010, 8 (2010). <https://doi.org/10.1155/2010/382179>
- [2] Kojić, V. Quasi-nearly subharmonic functions and conformal mappings. *Filomat (Niš)* 21(2), 243-249 (2007)
- [3] Koskela, P., Manojlović, V. Quasi-nearly subharmonic functions and quasiconformal mappings. *Potential Anal.* 37(2), 187-196 (2012).

- [4] **Todorčević, V.** Subharmonic behavior and quasiconformal mappings. *Analysis and Mathematical Physics* <https://doi.org/10.1007/s13324-019-00308-8>
- 

## A new insight into $T^n$ -action on the Grassmannians $G_{n,2}$

**Svjetlana Terzić**

*University of Montenegro, Džordža Vašingtona bb, Podgorica*  
*e-mail: sterzic@ucg.ac.me*

**Abstract.** The canonical action of the compact torus  $T^n$  on the complex Grassmann manifolds  $G_{n,k}$  has been extensively studied in [ 1], [ 2], [ 3]. In this talk we focus on the studying of the canonical  $T^n$ -action on the Grassmann manifold  $G_{n,2}$ ,  $n \geq 4$ . In that context we explicitly describe those polytopes which can be obtained as the images of the closures of  $(\mathbb{C}^*)^n$ -orbits on  $G_{n,2}$  by the standard moment map  $\mu : G_{n,2} \rightarrow \Delta_{n,2} \subset \mathbb{R}^n$ . We show that those of them which intersect the interior of  $\Delta_{n,2}$  have all dimension at least  $n - 2$  and discuss the chamber decomposition of  $\Delta_{n,2}$  given by these polytopes as well as the relation of the moment map to this chamber decomposition. Following this pattern we also signify one more approach for the description of the universal space of parameters for  $G_{n,2}$  as well as its orbit space  $G_{n,2}/T^n$ . We also discuss the issue related to a smooth structure on the orbit space  $G_{n,2}/T^n$  for which the canonical projection map  $G_{n,2} \rightarrow G_{n,2}/T^n$  is a smooth map.

**Keywords:** Grassmann manifolds; torus action; orbit space.

### References

- [1] **Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzić.** Topology and geometry of the canonical action of  $T^4$  on the complex Grassmannian  $G_{4,2}$  and the complex projective space  $\mathbb{C}P^5$ , *Moscow Math. Jour.* Vol. 16, Issue 2, (2016), 237–273.
- [2] **V. M. Buchstaber and S. Terzić.** The foundations of  $(2n; k)$ -manifolds, *Mat. Sbornik*, Vol. 210, no.4, (2019), 41–86.
- [3] **V. M. Buchstaber and S. Terzić,** Toric Topology of the Complex Grassmann Manifolds, *Moscow Math. Jour.* Vol. 9, Issue 3, (2019), 397–463.
- 

## Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators

**Danko Jocić**

*University of Belgrade, Department of Mathematics, Studentski trg 16, P.O.box 550, 11000 Belgrade, Serbia*  
*e-mail: jocic@matf.bg.ac.rs*

**Milan Lazarević**

*University of Belgrade, Department of Mathematics, Studentski trg 16, P.O.box 550, 11000 Belgrade, Serbia*  
*e-mail: lazarevic@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** Let  $\Phi$  be a symmetrically norming (s.n.) function,  $p \geq 2$ ,  $\Phi^{(p)*}$  to be a dual s.n. function to  $p$ -modified s.n. function  $\Phi^{(p)}$ ,  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , with  $A$  and  $B$  being normal operators such that  $AX - XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ .

If both  $A$  and  $B$  are strictly accretive, then for non-constant Pick function  $\varphi \in \mathcal{P}[0, +\infty)$

$$\|\varphi(A)X - X\varphi(B)\|_{\Phi} \leq \left\| \sqrt{\varphi' \left( \frac{A^* + A}{2} \right)} (AX - XB) \sqrt{\varphi' \left( \frac{B + B^*}{2} \right)} \right\|_{\Phi}. \quad (1)$$

If  $A$  and  $B$  have strictly contractive real parts, then

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{I - \left| \frac{A^* + A}{2} \right|^2} \left( \log \frac{I + A}{I - A} X - X \log \frac{I + B}{I - B} \right) \sqrt{I - \left| \frac{B + B^*}{2} \right|^2} \right\|_{\Phi} \leq \|AX - XB\|_{\Phi}.$$

If  $A$  is cohyponormal,  $B$  is hyponormal and at least one of them is normal, such that  $AX - XB \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ , then

$$\frac{\pi}{2} \left\| \cos \frac{A^* + A}{\pi} \left( \tan \frac{2A}{\pi} X - X \tan \frac{2B}{\pi} \right) \cos \frac{B + B^*}{\pi} \right\|_{\Phi^{(p)*}} \leq \|AX - XB\|_{\Phi^{(p)*}}. \quad (2)$$

Inequality (1) generalizes “difference” version of Heinz norm inequality [1, Hilfssatz 3] and mean values norm inequality [?, th. 4.4] for operator monotone functions. Inequality (2) remains valid for all s.n. function  $\Phi$  if  $A$  and  $B$  are both (additionally) normal, which extends inequalities in [3, th. 5] for self-adjoint operators  $H$  and  $K$ , whence their spectra  $\sigma(H)$  and  $\sigma(K)$  are contained in  $(-\pi/2, \pi/2)$ , to non necessarily self-adjoint operators  $A$  and  $B$ .

**Keywords:** Inner product type transformers, operator monotone functions,  $Q$  and  $Q^*$ -norms

## References

- [1] **E. Heinz.** Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,. *Math. Ann.*, 1951, 123, 415 – 438.
- [2] **D.R. Jocić.** Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak\*-integrals of operator valued functions. *J. Funct. Anal.*, 2005, 218, 318 – 346.
- [3] **H. Kosaki.** Arithmetic Geometric Mean and Related Inequalities for Operators. *J. Funct. Anal.*, 1998, 156, 429–451.

## Four-dimensional CR submanifolds of the six dimensional nearly Kähler manifolds

**Miroslava Antić**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: mira@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** An almost Hermitian manifold with an almost complex structure  $J$  and the Levi-Civita connection  $\nabla$  is said to be a strictly nearly Kähler manifold if the tensor  $\nabla J$  is skew-symmetric. It is known that the arbitrary nearly Kähler manifold can be decomposed into factors of three special types, and one of those types are six-dimensional nearly Kähler manifolds. We note that there are only four homogeneous six-dimensional strictly nearly Kähler manifolds: the sphere  $S^6(1)$ , the product  $S^3 \times S^3$ , the projective space  $CP^3$  and the flag manifold  $SU(3) = U(1) \times U(1)$ .

There are several types of submanifolds of an almost Hermitian manifold that have nice properties with respect to the corresponding almost complex structure  $J$ . If the tangent space of the submanifold is invariant for  $J$ , it is an almost complex submanifold and if  $J$  maps the tangent space into the corresponding normal space, the submanifold is a totally real submanifold. One of the generalizations of these two notions is the notion of CR submanifold, introduced by A. Bejancu. A submanifold  $M$  is a CR submanifold if there exists a differential almost complex distribution  $D_1$  on  $M$  ( $JD_1 \subset D_1$ ), such that its orthogonal complement  $D_2$  in  $TM$  is totally real distribution ( $JD_2 \subset T^{\perp}M$ ), where  $T^{\perp}M$  is the normal bundle over  $M$ .

Here we investigate four-dimensional CR submanifolds in six-dimensional strict nearly Kähler manifolds. We construct a moving frame that nicely corresponds to their CR structure. Moreover, we present some particular classes of CR submanifolds in  $S^6(1)$ .

**Keywords:** Nearly Kähler manifolds, almost complex structure, CR submanifolds.

---

## Riesz's Theorem for Lumer's Hardy Spaces

**Marijan Marković**

*Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro  
Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica, Montenegro  
e-mail: marijanmarkovic@gmail.com*

**Abstract.** We expose our recent results from the recent works [ 1 ] and [ 2 ] concerning a version of the well-known Riesz's theorem on conjugate harmonic functions for Lumer's Hardy spaces  $(Lh)^p(\Omega)$  on a domain  $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ : If a real-valued harmonic function  $U \in (Lh)^p(\Omega)$  has a harmonic conjugate  $V$  on  $\Omega$  (i.e., a real-valued harmonic function such that  $U + iV$  is analytic on  $\Omega$ ), then  $U + iV$  also belongs to  $(Lh)^p(\Omega)$ , and for the normalized conjugate we have the norm estimate  $\|U + iV\|_{(Lh)^p(\Omega)} \leq c_p \|U\|_{(Lh)^p(\Omega)}$ , with the best possible constant  $c_p$  in the case of positive  $U$ . This version of the Riesz theorem was obtained in [ 3 ] but with for  $C^2$ -smooth domains in  $\mathbf{C}^n$ , and without a precise constant. We are able to relax smoothness condition of the domain.

**Keywords:** Riesz' theorem, conjugate harmonic functions; Hardy spaces, Lumer's Hardy spaces.

## References

- [1] **M. Marković.** Riesz's theorem for Lumer's Hardy spaces. *American Math. Monthly*, to appear.
  - [2] **M. Marković, P. Melentijević.** On the Hollenbeck-Verbitsky conjecture and M. Riesz theorem for various function spaces. To appear.
  - [3] **E.L. Stout.**  $H^p$ -functions on strictly pseudoconvex domains. *Amer. J. Math.*, 1976, 98, 821 - 852.
- 

## An obstruction and a construction in an ambient of the cotangent bundle

**Jelena Katić**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: jelenak@matf.bg.ac.rs*

**Darko Milinković**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: milinko@matf.bg.ac.rs*

**Jovana Nikolić**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Serbia  
e-mail: jovanadj@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In this lecture we will give at least two good reasons why one should consider Floer-homological spectral invariants in the cotangent bundle. The first reason is that they give us an obstruction for a submanifold



to be a boundary. Secondly, by homogenization of spectral invariants we can construct a family of partial quasi-morphisms on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of the cotangent bundle.

**Keywords:** Symplectic topology, Floer homology.

---

## Khavinson problem for harmonic functions in the unit ball in $\mathbb{R}^n$

**Petar Melentijević**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade Studentski trg 16, 11000 Beograd, Serbia  
e-mail: petar.melentijevic31@gmail.com*

**Abstract.** We expose recent results on an extremal problem for bounded harmonic functions in the unit ball  $\mathbb{B}^n$ . In [1], the author solved the Khavinson conjecture in  $\mathbb{R}^3$ , an intriguing open question since 1992 posed by D. Khavinson, later considered in a general context by Kresin and Maz'ya. Precisely, the following inequality was obtained:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{(1 + \frac{1}{3}\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{1 - \rho^2} - 1 \right) \sup_{|y| < 1} |u(y)|,$$

with  $\rho = |x|$ , thus sharpening the previously known with  $|\langle \nabla u(x), n_x \rangle|$  instead of  $|\nabla u(x)|$ , where  $n_x = \frac{x}{|x|}$ . Very recently, Congwen Liu in [2] proved that similar estimate holds for bounded harmonic functions in the unit ball of  $\mathbb{R}^n$  i.e. the appropriate sharp constants for their radial derivatives and gradients coincide.

**Keywords:** Harmonic functions, Sharp estimates, Gradient of function, Special functions.

### References

- [1] **P. Melentijević** A proof of the Khavinson conjecture in  $\mathbb{R}^3$ . *Advances in Mathematics*, 352(2019), 1044-1065.
  - [2] **C. Liu** A proof of the generalized Khavinson conjecture. *arXiv:1909.00635*
- 

## The Hankel determinant and other inequalities for certain classes of univalent functions

**Milutin Obradović**

*Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Bulevar Kralja Aleksandra 73,  
11000, Belgrade, Serbia  
e-mail: obrad@grf.bg.ac.rs*

**Nikola Tuneski**

*Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanical Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in  
Skopje, Karpoš II b.b., 1000 Skopje, Republic of North Macedonia  
e-mail: nikola.tuneski@mf.edu.mk*

**Abstract.** In recent time, the problem of finding upper bound, preferably sharp, of the Hankel determinant for classes of univalent functions, is being rediscovered and attracts significant attention among the mathematicians working in the field. In that direction, this presentation will provide some new and improvements of existing results for the class of starlike functions and some of its subclasses.

**Keywords:** analytic, univalent, starlike, Hankel determinant, upper bound.

### References

- [1] **D.V. Prokhorov, J. Szynal**, Inverse coefficients for  $(\alpha, \beta)$ -convex functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A* 35 (1981), 125–143 (1984).
  - [2] **M. Obradović, N. Tuneski**, A Class of Univalent Functions with Real Coefficients, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2019) 1–12. <https://doi.org/10.1007/s40840-019-00842-5>
  - [3] **M. Obradović, N. Tuneski**, New upper bounds for the third Hankel determinant for different classes univalent functions, preprint.
- 

## Academician Miodrag Mateljević - development of Belgrade mathematical school in teaching and science

**Miloljub Albijanić**

*FEFA*

*e-mail: malbijanic@fefa.edu.rs*

**Miloš Arsenović**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*

*e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

**Miljan Knežević**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics*

*e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In this paper the scientific contribution of academician Miodrag Mateljević and his methodical approach in teaching mathematical analysis are emphasized. His contribution to scientific activity is related to his work on complex analysis and the publication of world-renowned scientific papers. His team spirit and work with young and talented students are particularly prominent. In the teaching methodology his original ideas that encourage students and colleagues to think can be highlighted. Works and books that characterize the beauty of his writing style are presented. The whole work is interwoven with the both creative and human personality of prof. dr Miodrag Mateljević, full member of Serbian Academy of Sciences and Arts.

**Keywords:** Academician Mateljević; scientific activity; teaching methodology.

### References

- [1] **M. Mateljević, M. Pavlović**.  $L^p$ -behavior of power series with positive coefficients and Hardy Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 87 No.2 (1983), 309-316.
- [2] **V. Božin, N. Lakić, V. Marković, M. Mateljević**. The unique extremality. *Journal d'Analyse* 75 (1998), 299-338.
- [3] **M. Knežević, M. Mateljević**. On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings, *J. Math. Anal. Appl.* Vol 334, No 1, 2007, 404-413.
- [4] **D. Kalaj, M. Mateljević**. Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains, *J. d'Analyse Mathématique* Vol.100 (2006), 117-132.
- [5] **M. Mateljević, M. Pavlović**. Multipliers of  $H^1$  and BMOA. *Pacific Journal of Mathematics* 146 (1990), 71-84.
- [6] **M. Mateljević, M. Pavlović**.  $L^p$ -behaviour of the integral means of analytic functions, *Studia Mathematica* Vol. 77 (1983), 219-237.
- [7] **M. Mateljević, M. Vuorinen**. On Harmonic Quasiconformal Quasi-Isometries, *Journal of Inequalities and Applications*, Volume 2010, Article ID 178732, 19 pages.
- [8] **M. Mateljević**. Distortion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* Vol. 51 (2006), 5-6, 711-722, plenary lecture.

- [9] **A. Aboob, M. Arsenović, M. Mateljević, A. Shkheam.** Moduli of Continuity of Harmonic Quasiregular Mappings on Bounded Domains, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, Volumen 38, 2013, 839-847.
- [10] **M. Mateljević.** Quasiconformal and Quasiregular harmonic analogues of Koebe's theorem and applications, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica*, Vol 32, No 2, 2007, 301-315.
- [11] **M. Mateljević.** Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps, *Zavod za udžbenike*, Beograd, 2012.
- [12] **M. Mateljević.** Kompleksna analiza 1, *Zavod za udžbenike*, Beograd, 2012.
- [13] **M. Mateljević.** Kompleksna analiza 2, *Zavod za udžbenike*, Beograd, 2012.
- [14] **M. Mateljević, M. Svetlik, M. Albijanić, N. Savić.** Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications, *Filomat* 27:4 (2013), 515-528.
- [15] **M. Mateljević.** The Lower Bound for the Modulus of the Derivatives and Jacobian of Harmonic Injective Mappings, *Filomat* 29:2 (2015), 221-244.
- [16] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018) 78-100.
- [17] **Akademici A. Ivić, S. Pilipović i G. Milovanović.** Predlog za izbor Miodraga Mateljevića za redovnog člana SANU, avgust 2018.
- [18] **M. Albijanić, M. Vitezović, M. Mateljević.** Ljudi intelektualne vrline: 170 godina SANU, *Zavod za udžbenike*, Beograd, 2011.
- [19] **M. Arsenović, M. Albijanić, M. Knežević, M. Svetlik.** Miodrag Mateljević - vertikalna beogradske matematičke škole, *Zbornik radova, Peti simpozijum „Matematika i primene”*, Matematički fakultet, 17-18.10.2014, Beograd 2015.
- [20] **M. Mateljević, M. Albijanić.** Lagrange's Theorem, Convex Functions and Gauss Map, *Filomat* 31:2 (2017), 321-334.

## Measures of $\tau_M$ -noncompactness in Hilbert $W^*$ -modules

**Zlatko Lazović**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16/IV, 11 000 Belgrade, Serbia  
e-mail: zlatkol@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We will define measures of  $\tau_M$ -noncompactness  $\mu$  for Hilbert  $W^*$ -module  $M$ , which are analogous to measures of weak noncompactness on Banach space, such that for bounded set  $H \subset M$  holds  $\mu(H) = 0$  iff  $H$  is relative compact in  $\tau_M$ -topology, which is generated by the system of seminorms  $\varphi(\langle y, \cdot \rangle)$  ( $y \in M$  and  $\varphi$  is normal state).

Angosto and Cascales [ 1] proved the following inequalities

$$ck(H) \leq k(H) \leq \gamma(H) \leq 2ck(H) \leq 2k(H) \leq 2\omega(H),$$

for any bounded subset  $H$  in Banach space  $X$ , where  $\omega, \gamma, k$  and  $ck$  are certain distance types in Banach spaces defined in [ 1].

We will prove that for our functions  $\omega', \gamma', ck', k'$  (analogous to functions  $\omega, \gamma, ck, k$ ) defined on the family of bounded subsets in Hilbert  $W^*$ -module  $M$ , the following inequalities hold

$$ck'(H) \leq k'(H), \quad \gamma'(H) \leq 2ck'(H) \leq 2k'(H) \leq 2\omega'(H).$$

**Keywords:** Hilbert  $W^*$ -module; compactness; measures of weak noncompactness.

## References

- [1] **C. Angosto, B. Cascales.** Measures of weak noncompactness in Banach spaces, *Topology and its Applications*, 2009, 156, pp. 1412 - 1421.

## Optimization and Variational Inequalities with Coupled Constraints

**Milojica Jaćimović**

*University of Montenegro, Department of Mathematics, Podgorica  
e-mail: milojica@jacimovic.me*

**Nevena Mijajlović**

*University of Montenegro, Department of Mathematics, Podgorica  
e-mail: nevenamijajlovic@hotmail.com*

**Abstract.** We consider variational inequalities with coupled constraints. The necessary conditions of the optimality in minimization problems can be written in the form of variational inequalities. Usually, these variational inequalities have to be solved on some fixed set. But, one often has to solve a variational inequality or minimization problem when the set of constraints is changeable. Some classical algorithms of minimizations are not applicable in these cases, because solving variational inequalities with coupled constraints requires that variational inequality has to be solved concurrently with the fixed point problem of the set-valued mapping. We will present and analyse three types of algorithms which are adapted for solving variational inequalities and minimization problems with coupled constraints: (1) algorithms of the gradient type [1] and [2]; (2) algorithms based on Karush-Kuhn-Tucker theorem (s. [3]) and (3) distributed algorithms based on consensus.

**Keywords:** variational inequalities; Karush-Kuhn-Tucker theorem; coupled constraints.

### References

- [1] **M. Jaćimović, N. Mijajlović** On methods for Solving Quasi-Variational Inequalities, *VIII Moscow International Conference on Operation Researchs (ORM 2016)*, Moscow, October 2016, (ISBN 978-5-317-05205-8), pp. 49.-52.
  - [2] **N. Mijajlović, M. Jaćimović** A proximal method for solving quasi-variational inequalities. *Comput. Math. Math. Phys.*, 55, 2015, No. 12, 1981-1985,
  - [3] **F. Fachinei, C. Kanzow, S. Sagratela** Solving quasi-variational inequalities via KKT conditions, *Mathematical Programming V.* 144, 2014, Issue 1-2, pp. 369-412.
- 

## Math, Art and Visualization

**Biljana Jolevska-Tuneska**

*Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Dept. of Mathematics and Physics, Karpos 2 bb, Republic of North Macedonia  
e-mail: biljana@feit.ukim.edu.mk*

**Abstract.** Mathematical tools have always been used in an essential way in the creation of art. Since ancient times, symmetry was used as a tool for various aspects of fabrics, ethnic designs, architecture. During the Renaissance, the artists have needed to develop or use mathematical thinking to carry out their artistic vision. Among such artists were Luca Pacioli (1145-1514), Leonardo da Vinci (1452-1519) and Albrecht Dürer (1471-1528).

Today's mathematical tools are more sophisticated, with digital technology fast becoming a primary choice. In the hands of an artist, computers can produce art. Isometries, similarities, and affine transformations can

transform images exactly or with purposeful distortion, projections can represent three-dimensional forms on two-dimensional picture surfaces. All these transformations can be mathematically described, and the use of guiding grids to assist in performing these transformations has been replaced today largely by computer software.

At the end of this paper we use mathematical program *Mathematica* to show some art designs.

### References

- [1] G. Maisner, The Golden Ratio – The Divine Beauty of Mathematics, Quatro’s Race Point Publishing Group, 2018.
- [2] D. Schattschneider, Mathematics and Art – So Many Connections, <http://www.mathaware.org/mam/03/essay3.html>, April 2003.
- [3] J.J.O’Connor, E.F.Robertson, ”Mathematics and art – perspective”, 2003, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Art.html>
- [4] <https://mcescher.com/>

---

## Gröbner-ove baze i planarnost preseka dve algebarske površi

**Aleksandra Rosić**

*Visoka škola strukovnih studija za informacione tehnologije, Savski nasip 7, Beograd  
e-mail: [aleksandra.rosic@its.edu.rs](mailto:aleksandra.rosic@its.edu.rs)*

**Branko Malešević**

*Elektrotehnički fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd  
e-mail: [malesevic@etf.rs](mailto:malesevic@etf.rs)*

**Bojan Banjac**

*Fakultet tehničkih nauka, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad  
e-mail: [bojan.banjac@uns.ac.rs](mailto:bojan.banjac@uns.ac.rs)*

**Apstrakt.** U ovom radu razmatramo mogućnosti za planarnost preseka dve algebarske površi u  $\mathbb{R}^3$ . Detaljno je razmatran algoritam deljenja polinoma više promenljivih, navode se primeri algebarskih površi koje imaju planaran presek do koga se dolazi upotrebom parcijalne redukcije.

**Ključne reči:** Gröbner-ove baze; algoritam deljenja; planaran presek; parcijalna redukcija.

### Bibliografija

- [1] **Bruno Buchberger** Gröbner Bases and Systems Theory. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2001, 12, pp.223 - 251.
- [2] **D. Cox, J. Little, D. O’Shea.** Ideals, Varieties, and Algorithms. *Springer Science+Business Media, LLC*, 2007.
- [3] **B. Malešević, M. Obradović.** An Application of Gröbner bases to planarity of intersection of surfaces. *Filomat* 23:2, 2009, pp.43-55.

## Modifikovani genetski algoritam za treniranje konvolutivnih neuronskih mreža

**Milan M. Čugurović**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd  
e-mail: milan\_cugurovic@matf.bg.ac.rs*

**Nikola Dimitrijević**

*Majkrosoft razvojni centar Srbija, Španskih boraca 3, 11070 Beograd  
e-mail: nikoladim95@gmail.com*

**Stefan Mišković**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd  
e-mail: stefan@matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Ovaj rad prezentuje modifikovanu varijantu genetskog algoritma za treniranje konvolutivnih arhitektura kojom se smanjuje vreme potrebno za izvršavanje algoritma. Izmena se zasniva na modifikovanju evolutivnog dela algoritma fokusiranjem na ograničavanje samog vremena treninga svake jedinke kao i na uključivanje znanja o parametrima jedinki prethodnih generacija u svakoj novoj generaciji. Prethodnim se evolucija čini efikasnijom, smanjenjem samog vremena potrebnog za pronalaženje željene arhitekture.

Dodatni doprinos ovog rada predstavlja kreiranje novog skupa podataka *DoubledMNIST*, koji predstavlja naslednika popularnog skupa podataka *MNIST*. Kreirani skup podataka dupliran je u odnosu na *MNIST* skup podataka kako u smislu samog broja instanci i tako i u smislu rezolucije svake pojedinačne instance. Rezultati prikazani u radu dobijeni su primenom prezentovog metoda poboljšanja na kreiranom skupu podataka. Rad takođe definiše rezultate klasifikacije na pomenutom skupu.

**Ključne reči:** genetic algorithm; convolutional architectures; MNIST dataset

### Bibliografija

- [1] **Xie, L., Yuille, A.** Genetic cnn. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (pp. 1379-1388)*, 2017.
  - [2] **Cohen, G., Afshar, S., Tapson, J., van Schaik, A.** EMNIST: an extension of MNIST to handwritten letters. *arXiv preprint arXiv:1702.05373.*, 2017.
-

## Smooth ER functions

**Danijela Branković**

*Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade  
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: danijela@etf.bg.ac.rs*

**Žarko Mijajlović**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade  
Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: zarkom@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In this paper we will present some properties of smooth ER (extended varying) functions. In addition, we will introduce a linear operator  $\mathcal{L}$  and use it in order to obtain sufficient and necessary conditions for a function  $f(x)$  to be a proper ER function. We will also use a linear operator  $\mathcal{L}$  to find new representations of functions  $f(x)$  from this class.

**Keywords:** regularly varying functions; smooth ER functions; linear operator.

## Хиперграфички политопи

Марко Пешовић

*Грађевински факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: mpesovic@grf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** Хиперграфу  $H$ , дефинисаном на скупу темена  $[n]$ , можемо придружити *хиперграфички политоп*  $Q_H := \sum_{H \in \mathcal{H}} \Delta_H$ , где је  $\Delta_H := \text{conv}\{e_h : h \in H\}$  страна симплекса  $\Delta_{n-1}$ . Нормална лепеза  $\mathcal{N}(Q_H)$  је грубља од лепезе стандардног пермутоедра  $\mathcal{N}(Pe^{n-1})$ , па је  $Q_H$  један уопштени пермутоедар. Проучавамо *тежински енумератор целобројних тачака* дефинисан са

$$F_q(Q_H) := \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \cap \mathcal{N}(Q_H)} q^{n-1-\dim(G_\omega)} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n},$$

где је  $G_\omega$  страна од  $\mathcal{N}(Q_H)$  која садржи  $\omega \in \mathbb{Z}_+^n$ . Тежински енумератор се подудара са универзалним морфизмом  $\Psi_q : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{QSym}$ , где је  $\mathcal{H}$  извесна Хопфова алгебра хиперграфова и  $\mathcal{QSym}$  Хопфова алгебра квазисиметричних функција. Такође, енумератор садржи информацију о  $f$ -вектору хиперграфичког политопа  $Q_H$ , то јест

$$f(Q_H, q) = (-1)^n \mathbf{ps}^1(F_{-q}(Q_H))(-1),$$

где је  $\mathbf{ps}^1$  главна специјализација. У случају простих графова, хиперграфички политоп одговара графичком зонотопу, а енумератор  $F_q$  представља уопштење Стенилијеве хроматске функције графа.

**Кључне речи:** хиперграф; хиперграфички политоп;  $f$ -полином; комбинаторна Хопфова алгебра; квазисиметричне функције.

## Библиографија

- [1] **M. Aguiar, F. Ardila**, Hopf monoids and generalized permutahedra, arXiv : 1709.07504.
  - [2] **V. Grujić**, Counting faces of graphical zonotopes, *Ars Math. Contemporanea*, 2017, 13, 227 – 234.
  - [3] **M. Pešović**, Integer points enumerator of hypergraphic polytopes, arXiv : 1812.09770.
- 

## Нови тестови експоненцијалности $\omega^2$ типа

Марија Цупарић

*Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија*  
*e-mail: marijar@matf.bg.ac.rs*

Бојана Милошевић

*Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија*  
*e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Јаков Ју. Никитин

*Катедра за математику и механику, Државни универзитет у Санкт Петербургу, Русија*  
*Истраживачки национални универзитет - Висока економска школа, Русија*  
*e-mail: yanikit47@mail.ru*

Марко Обрадовић

*Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија*  
*e-mail: marcone@matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** Тестирање сагласности са расподелом један је од значајних задатака непараметарске статистике. Последњих година је посебно актуелан приступ за конструкцију тест статистика који подразумева коришћење карактеризација на основу једнаке расподељености неких случајних величина. На предавању ће бити приказано како се тест статистике могу формирати као  $L^2$  растојања између  $V$ -емпиријских функција расподела случајних величина које се јављају у карактеризацији. Добијена тест статистика  $\omega^2$  типа је, под сложеном нултом хипотезом, слободна од параметра експоненцијалне расподеле.

Квалитет тестова испитан је локалном Бахадуровом ефикасношћу, у случају великог узорка, као и емпиријским моћима, за мале и умерене величине узорака. На основу оба критеријума, наш тест се показао као бољи за већину алтернатива него интегрални и тест Колмогоровог типа који су засновани на истој карактеризацији.

**Кључне речи:** тестирање сагласности; асимптотска ефикасност;  $V$ -статистика; карактеризација.

---

## EP matrice

Билјана Радић

*Универзитет Singidunum, Danijelova 32 i Kumodraška 261a, 11 000 Београд, Србија*  
*e-mail: bradicic@singidunum.ac.rs*

**Апстракт.** У овом раду ће бити разматрана класа матрица коју Schwerdtfeger у [ 1], Pearl у [ 2] и неки други аутори називају EP matrice или  $EP_r$  matrice, mada su ove matrice poznate i pod nazivom opsežno–Hermitske



matrice. Navešćemo šta je potrebno i dovoljno da bi neka matrica pripadala razmatranoj klasi matrica a u vezi je sa njenim Mur-Penrouzovim i grupnim inverzom. Na kraju će biti navedeni i primeri  $EP$  matrica iz klase  $k$ -cirkularnih matrica koja predstavlja podklasu klase matrica koje duž glavne dijagonale imaju isti element ali i duž svake njoj paralelne dijagonale (klasa Teplicovih matrica). U navedenim primerima, da bismo odredili Mur-Penrouzov (i grupni) inverz koristimo faktorizaciju matrica punog ranga tj. predstavljamo matrice kao proizvod dve matrice pri čemu je rang prve matrice jednak broju njenih kolona, a rang druge matrice jednak broju njenih vrsta.

**Кључне речи:**  $EP$  matrica; Mur-Penrouzov inverz matrice; grupni inverz matrice.

### Bibliografija

- [1] **H. Schwerdtfeger.** Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices. *P. Noordhoff, Groningen*, 1950, 288 pp.
  - [2] **M. H. Pearl.** On normal and  $EP_r$  matrices. *Michigan Math. J.*, 1959, 6, 1 - 5.
- 

## Решавање Штурм-Лиувиловог проблема са изводом разломљеног реда методом коначних елемената

Вукашин Брковић

Факултет организационих наука, Јове Илића 154, Београд  
e-mail: vukasin.brkovic@fon.bg.ac.rs

Александра Делић

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд  
e-mail: adelic@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Теорија извода разломљеног реда (*fractional derivatives*) је због својих многобројних примена у науци постала предмет великог интересовања у последњих неколико деценија, и област је која се интензивно развија. Разломљени Штурм-Лиувилев проблем је у вези са процесом аномалне дифузије у ограниченој области, која се моделује преко извода разломљеног реда. Изводи разломљеног реда су нелокални оператори, па се најчешће не може одредити аналитичко решење проблема у којима они фигуришу, што је разлог зашто се развијају нумеричке методе за одређивање приближног решења таквих проблема.

У раду ће са теоријског и нумеричког аспекта бити анализиран једнодимензиони Штурм-Лиувилев проблем са изводом разломљеног реда  $1/2 < \alpha < 1$ . Биће постављена слаба формулација проблема у одговарајућем простору Соболева разломљеног реда и биће разматрана апроксимација проблема стандардном методом коначних елемената. Анализираће се конвергенција методе и биће представљени нумерички експерименти који ће бити упоређени са теоријским резултатима.

**Кључне речи:** Штурм-Лиувилев проблем; Метода коначних елемената; Оператори разломљеног реда.

### Библиографија

- [1] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujilo.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Elsevier Science and Technology, Boston*, 2006.
- [2] **M. Klimek, M. Cieselski, T. Blaszczyk.** Exact and numerical solutions of the fractional Sturm-Liouville problem. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21, No 1, 2018, pp. 45-71.

- [3] **B. Jin, R. Lazarov, X. Lu, Z. Zhou.** A simple finite element method for boundry value problems with a Riemann-Liouville derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 293, 2002, pp 94-111.
- 

## Some recent results on diffeomorphisms of generalized Riemannian spaces and their generalizations

**Miloš Z. Petrović**

*Faculty of Agriculture in Kruševac, University of Niš, Kosančićeva 4, 37 000 Kruševac  
e-mail: petrovic.milos@ni.ac.rs*

**Abstract.** We present recent author's contributions to the theory of diffeomorphisms of manifolds in the generalized Riemannian settings. A generalized Riemannian space is a differentiable manifold endowed with a non-symmetric basic tensor. Very recently, various types of symmetric generalized Riemannian spaces were defined by the author in collaboration with M.S. Stanković and P. Peška. Conformal and concircular diffeomorphisms of generalized Riemannian spaces were studied without any additional assumptions by the same authors. Also, we recall author's results on almost geodesic mappings of generalized Riemannian spaces where additional assumptions appeared. Finally, we present author's and Lj.S. Velimirović's results on generalized Kähler spaces which include some examples of these spaces. We compare many of recently obtained results, give some open questions regarding investigation of generalized Riemannian spaces and offer new directions in studying those problems.

**Keywords:** diffeomorphism; generalized Riemannian space; curvature operator; symmetric space; invariant.

### References

- [1] **Miloš Z. Petrović, Ljubica S. Velimirović.** Generalized Kahler spaces in Eisenhart's sense admitting a holomorphically projective mapping. *Mediterr. J. Math.*, 2018, 15:150, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-018-1194-9>.
- [2] **Miloš Z. Petrović.** Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, 2019, 42, 707 - 727. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40840-017-0509-5>
- [3] **Miloš Z. Petrović, Mića S. Stanković and Patrik Peška.** On Conformal and Concircular Diffeomorphisms of Eisenhart's Generalized Riemannian Spaces. *Mathematics*, 2019, 7, <https://doi.org/10.3390/math7070626>.
- 

## Izazovi primene blockchain tehnologije

**Nikola Perić**

*Mozzart  
e-mail: nikola.m.peric@gmail.com*

**Apstrakt.** Informacione tehnologije omogućile su automatizaciju operativnog rada u različitim domenima poslovanja procesuirajući informacije na brži i bezbedniji način. U vremenu kada Internet počiva na matematici, kriptografiji i softverskom inženjerstvu, realno je očekivati da Internet na blockchain tehnologiji iz korena izmeni poslovne modele čitavih sektora, pa i industrija. Prva i ujedno najpoznatija, a nadasve i najzastupljenija primena blockchain tehnologije su kriptovalute, među kojima je najpopularniji Bitcoin. U određenim slučajevima, blockchain se može koristiti u svrhe čuvanja podataka određenih veličina. Pošto je podatke u blockchain-u skoro nemoguće izmeniti, preporuka je da se baš iz tog razloga blockchain upotrebi kao rešenje za integritet podataka

kojim bi se obezbedila sigurnost da niko neće moći da ih menja i da će podaci biti sačuvani baš onakvi kakvi zaista i jesu. Uticaj blockchain-a na kompletan proces osiguranja mogao bi biti značajan od prikupljanja podataka, analize rizika, formiranja visine premije, izdavanja polisa, obradu zahteva za isplatu. Koncept pametnih ugovora zasnovan na blockchain-u omogućava direktnu razmenu dobara, bez mogućnosti da jedna strana prevari drugu i ne ispuni svoj deo ugovora. Potencijal blockchain tehnologije je veliki. Brojni su zagovornici koji blockchain smatraju najvećom revolucijom od pojave Interneta.

**Ključne reči:** primena blockchain tehnologije; pametni ugovori.

---

## Kretanje rezonantnih asteroida veoma malim brzinama Jarkovskog i njegov uticaj na oblik familije asteroida

Ivana Milić Žitnik

*Astronomska opservatorija, Volgina 7, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: ivana@aob.rs*

**Apstrakt.** Gravitacioni i negravitacioni fenomeni utiču na dinamiku asteroida u Glavnom asteroidnom pojasu (GAP). Najznačajniji gravitacioni mehanizmi su rezonance u srednjem kretanju (RSK) koje mogu da ubrzaju ili usporavaju orbitalne promene, dok je efekat Jarkovskog najznačajnija negravitaciona sila. Nova sveobuhvatna istraživanja o interakciji između efekta Jarkovskog i RSK i njenom uticaju na kretanje asteroida u GAP-u su predstavljena u Milić Žitnik i Novaković (2016) i Milić Žitnik (2016). Na ovom predavanju će biti predstavljena specifična osobina kretanja asteroida sa veoma malim brzinama Jarkovskog ( $da/dt$ ) preko RSK 2-tela sa Jupiterom (Milić Žitnik 2019). Primetili smo da se asteroidi sa brzinama Jarkovskog reda  $10^{-5}$  AJ/Mgod i sa manjim kreću veoma brzo preko RSK. Ovi rezultati mogu da ukazuju da ispod određene vrednosti  $da/dt$ , asteroidi tipično brzo pređu preko RSK. Iz dobijenih rezultata smo zaključili da je granična vrednost za brzinu Jarkovskog  $7 \times 10^{-5}$  AJ/Mgod. Naš sledeći zaključak je da su 'prelomne' tačke u  $V$ -obliku starih familija asteroida, koje su presečene jakim RSK sa obe strane vrlo blizu njihovog roditeljskog tela, upravo mesta inverznih vrednosti 'graničnih' prečnika u ravni  $(a, 1/D)$ , gde je  $a$  velika poluosa i  $D$  prečnik asteroida.

**Ključne reči:** asteroidi; numeričke metode; efekat Jarkovskog; rezonance u srednjem kretanju

### Bibliografija

- [1] I. Milić Žitnik, B. Novaković. The role of mean-motion resonances in semimajor axis mobility of asteroids. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 816, L31 (6pp).
- [2] I. Milić Žitnik. Interaction between Yarkovsky force and mean-motion resonances: some specific properties. *Serb. Astron. J.*, 2016, 193, 19-26.
- [3] I. Milić Žitnik. The specific property of motion of resonant asteroids with very slow Yarkovsky drift speeds. *MNRAS*, 2019, 486, 2435-2439.

## Нумеричке методе за решавање сингуларно пертурбованих диференцијалних једначина

Јелена Тасић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16  
e-mail: jelena\_tasic@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Многе појаве у природи моделују се диференцијалним једначинама у којима фигурише мала позитивна вредност  $\varepsilon$ . Присуство овог параметра узрокује нагле промене решења на неком интервалу. Из овог разлога класичне нумеричке методе не дају задовољавајућа решења ових проблема, осим у случају када се користи јако мали корак  $h$ , што са друге стране није практично. Зато су развијене посебне методе и мреже за овакве диференцијалне једначине. У раду су анализирани сингуларно пертурбоване диференцијалне једначине другог реда. Извршена је нумеричка апроксимација проблема методом централних разлика, *urwind* шемом, као и методом са фитованим оператором. Описане су Бахваловљева и Шишкинова мрежа и извршена је апроксимација проблема коришћењем ових мрежа. Упоредбене су оцене брзине конвергенције за наведене методе. Добијени резултати су експериментално проверени на примерима.

**Кључне речи:** сингуларно пертурбоване једначине; централне разлике; *urwind* шема; Шишкинова мрежа, Бахваловљева мрежа

---

## Концепт тоталне интегрбилности

Branko Sarić

Visoka škola tehničkih studija, Svetog Save 65, 32 000 Čačak  
e-mail: saric.b@mts.rs

**Апстракт.** Како је класа реалних функција подкласа класе комплексних функција, дефинисање појма остатка, за подкласу реалних функција, је логички условљено постојањем већ дефинисаног појма остатка шире класе комплексних функција. Шодно томе, а на бази дефинисаног појма остатка реалних функција једне реалне променљиве, уводи се појам сингуларне вредности несвојственог интеграла, дефинисан као збир остатака примитивне функције подинтегралне функције на интервалу интеграције, као и појам тоталне вредности несвојственог интеграла, као збир *Кошијеве* главне вредности и сингуларне вредности несвојственог интеграла. Концепт тоталне интегрбилности, уведен на овај начин, води ка генерализацији *Njutn-Lajbnicove* формуле, у смислу да *Njutn-Lajbnicova* формула, у концепту тоталне интегрбилности, важи безусловно, односно за све парове подинтегралних реалних функција и њихових примитивних. Самим тиме, отворила се могућност да *Njutn-Lajbnicova* формула буде основа за дефинисање јединственог појма интеграла (неодређеног и одређеног), као интервалне функције. Све ово, претходно речено, илустровано је са два примера, примером тоталне интеграције функције извода *Канторове* функције на сегменту  $[0,1]$  и тоталне интеграције *Диракове* функције, чија примитивна је *Хевисајдова* одскочна функција, на интервалу  $[-1,1]$ .

**Кључне речи:** остатак реалне функције; концепт тоталне интегрбилности; *Njutn-Lajbnicova* формула.

### Bibliografija

- [1] **R. G. Bartle.** A Modern Theory of Integration. *Graduate Studies in Math. 32*, Providence, AMS, 2001.
  - [2] **V. Boonpogkrong.** On Non-Absolute Integrals. *Thai J. Math.*, 2017, 15 (3), 807 - 818.
  - [3] **I. J. L. Garces , P. Y. Lee.** Convergence theorems for the  $H_1$ -integral. *Taiw. J. Math.*, 2000, 4 (3), 439 - 445.
  - [4] **R. A. Gordon.** The Integrals of *Lebesgue, Denjoy, Perron* and *Henstock*. *Graduate Studies in Math. 4*, Providence, AMS, 1994.
  - [5] **D. Hestenes.** Multivector Calculus. *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, 24, 313 - 325.
  - [6] **D. Hestenes.** Multivector Functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, 24, 467 - 473.
  - [7] **P. Y. Lee and R. Vyborny.** The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock. *Cambridge University Press*, 2000.
  - [8] **A. Macdonald.** Stokes' theorem. *Real Analysis Exchange*, 2002, 27, 739-747.
  - [9] **M. Mateljević.** Kompleksne funkcije 1 & 2. *Društvo matematičara Srbije*, 2006.
  - [10] **M. Mateljević.** Kompleksna analiza 1. *Zavod za udžbenike*, 2012.
  - [11] **D. S. Mitrinović and J. D. Kečkić.** The Cauchy Method of Residues: Theory And Applications. *Mathematic and its applications (East European series)*, Reidel, Dordrecht, 1984.
  - [12] **B. Sarić.** On the  $H_N$ -integration of spatial (integral) derivatives of multivector fields with singularities in  $\mathbb{R}^N$ . *Filomat*, 2017, 31 (8), 2433 - 2439.
  - [13] **B. Sarić.** On an integral as an interval function. *Sci. Bull. Series A.*, 2016, 78 (4), 53 - 56.
  - [14] **B. Sarić.** On totalization of the  $H_1$ -integral. *Taiw. J. Math.*, 2011, 15 (4), 1691 - 1700.
  - [15] **B. Sarić.** On totalization of the *Henstock-Kurzweil* integral in the multidimensional space. *Czech. Math. J.*, 2011, 61 (4), 1017 - 1022.
  - [16] **B. Sarić.** *Cauchy's* residue theorem for a class of real valued functions. *Czech. Math. J.*, 2010, 60 (4), 1043 - 1048.
- 

## Корелација наставе информатике, математике и физике кроз програмски језик Пајтон

Филип Марић

Математички факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: filip@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** У школској 2017/2019. години у основним школама у Србији уведена је обавезна настава информатике, која у значајном мери укључује и изучавање основа програмирања. Истовремено је измењен план и програм информатике у гимназијама, тако да обухвати и област анализе података. Иако то план и програм не прописује, у наставној пракси се углавном користи програмски језик Пајтон, пре свега због своје изузетно једноставне синтаксе и мноштва корисних библиотека. Изучавање програмирања захтева одређена математичка знања. Са друге стране, чињеница да деца од раног узраста владају одређеним програмерским вештинама отвара простор да се одређене теме из наставе математике и физике обраде на другачији, савременији начин. Излагање ће бити посвећено анализи конкретних примера који се могу обрађивати у основној и средњој школи, који указују на то да инстистирање на корелацији наставе информатике, математике и физике може допринети квалитетнијем изучавању све ове три тесно повезане дисциплине.

**Кључне речи:** настава програмирања; Пајтон; програмирање у настави математике; програмирање у настави физике; корелација наставних предмета

---

## Игре на срећу - математиком до победе?

Милан Јовановић

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16  
e-mail: mjovanovic@matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** Од давнина су се људи коцкали и играли игре на срећу. Може ли се уз помоћ математике победити у тим играма и могу ли се ти "непедагошки" примери искористити да се ученик заинтересује за математику?

**Кључне речи:** вероватноћа; случајни догађаји.

### Библиографија

- [1] A. Ravas Poreklo i nastanak teorije verovatnoće. *Nastava matematike*, 2014, LIX(4), 17 - 30.
- 

## Примена Птоломејеве теореме

Миљан Кнежевић

*Универзитет у Београду, Математички факултет  
e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** У овом кратком излагању ћемо представити лепоту и значај Птоломејеве теореме у општем облику. Методички ћемо се бавити решењима неколико занимљивих задатака, од којих су неки били задавани и на такмичењима највишег ранга. Посебну пажњу посветићемо појединим приступима приликом излагања једне овако интересантне теме у наставном процесу. Даћемо низ смерница које могу бити од користи свим наставницима математике, као и заинтересованим ученицима.

**Кључне речи:** Тетивни четвороугао; сличност.

---

## Математичко моделовање наставног процеса

Звездан Стојановић

*Европски универзитет Брчко дистрикт  
e-mail: zvezdan.stojanovic070@gmail.com*

Елвир Ћајић

*КСС Свети ФранЈо Тузла  
e-mail: ecajic86@gmail.com*

**Апстракт.** Математика као наука и математичко моделовање кроз историју су се развијали упоредо. Међутим тек у скоријој прошлости математичко моделовање се појављује у основним, средњошколским и високообразовним наставним процесима, плановима и програмима. Темелјна математичка компетенција се дефинише као способност особе за развој и примјену математичког мишљења с циљем рјешавања низа проблема у свакодневном животу.

О математичком моделу се говори и у наставним плановима и програмима, гдје се општим математичким способностима наводи да ученици, студенти па и сами наставници и професори морају бити осposobljeni за рјешавање математичких проблема и примјену математике у различитим контекстима, укључујући и свијет рада. Разлог за промјену досадашње наставне праксе углавном долази због пословног притиска. Наиме пракса показује да је отежан трансфер школског знања на стварне проблеме. Уочено је да школа пружа ученику веома опсежно математичко знање међутим не припрема их да то знање употребе. У овом раду ћемо помоћу математичког модела објаснити како примјеном рачунара организовати неки наставни процес. Дакле можемо рећи да ћемо у раду математички модел приказати помоћу рачунара. Основни циљ јесте поставити конкретан математички модел, извршити класификацију и подјелу модела а потом и конкретан случај за линеарни и нелинеарни модел надзираниг учења кроз наставни процес, приказати симулацију у неком софтверском алату: Matlab, Wolfram Mathematica, SPSS. Показати ћемо алгоритам учења, математички модел и даћемо неке конкретне мјере математичког моделовања примјеном неуралних мрежа конкретног модела учења, са могућношћу оптимизације постављеног модела.

**Кључне речи:** Математички модел, наставни процес, алгоритам учења помоћу рачунара, побољшање модела учења.

### Библиографија

- [1] **A. Tokić** Modelovanje i simulacije kontinualnih i diskretnih sistema . *Modelovanje i simulacije, FET Tuzla* , 2010, 6, 191 - 204.
- [2] **Z. Stanimaković.** Nelinearno programiranje- научна knjiga Beograd. *Nelinearno programiranje* ,2004, pp. 31–50.
- [3] **M.M-Dedijer** Zbirka zadataka iz numeričke analize . *Numerička analiza* , 199, pp 104-191.
- [4] **Z.Stojanovic** Архитектура, протоколи и сервиси Интернета, Европски Универзитет, Брчко дистрикт, ISBN: 978-99976-605-9-6, str 222, 2015

---

## Тригонометрија у акустици

Младен Беговић

Британска Интернационална Школа Аркадија Академија, Котор  
e-mail: prof.begovic@gmail.com

**Апстракт.** Како настаје звук? Које су његове физичке особине? Којом размером дужина жице одређује висину тона? Како је Питагора започео овај процес? Како се на монокорду може свирати и много других питања и одговора очекује слушаоце овог предавања. И најважније од свега: Како наставу математике учинити забавном и инспиративном! Слушаоци ће бити у прилици да проуче импровизовани инструмент тзв. монокорд на којем треба да одреде позиције тонова да би одсвирали једноставну мелодију. Позиције тонова одређују на основу размера и пропорција које могу пронаћи на интернету или израчунати уз подршку предавача. Док је први део предавања намењен наставницима математике у основној школи други део предавања се односи на сабирање синусоида које представљају тонове До, Ми и Сол тако да као резултату добијемо графички приказ Це - дур акорда. У овом делу предавања акценат је на графичком приказу сабирања тригонометријских функција и препоручује се употреба Геогбра алата. Циљ предавања је да слушаоци направе логичку везу тригонометрије, физике и акустике, као и уоче значај математичких принципа у уметности, а све у сврху контекстуализације наставе математике ради мотивације ученика. Евалуациони формулари и дискусија су планирани за завршетак предавања.

**Кључне речи:** акустика; размера; тригонометрија; амплитуда; фреквенција.

## Пројектна настава у математици-квиз „Мост математике”

Татјана Станковић

ЕТШ „Никола Тесла”, Панчево  
e-mail: t.stankovic12@gmail.com

Радица Каровић

ОШ „Ослободиоци Београда”, Београд  
e-mail: radica.karovic22@gmail.com

**Апстракт.** Квиз „Мост математике” чије се финале одржава у мају у Врњачкој бањи за ученике старијих разреда основних школа као и за ученике средњих школа обухвата четири игре: питалице, геометриј-ски изазов, пројекат и математички букет, док за ученике млађих разреда основних школа обухвата две игре: лавиринт и пројекат. Игра пројекат подразумева израду и одбрану пројекта на тему задату од стране удружења „Млади математичар”. У овом раду биће приказано са којим захтевима се сусрећу учесници квиза и како при реализацији пројекта имплементирају математику. Посебан осврт ће бити и на писану документацију коју учесници прилажу пре сваког нивоа такмичења и помочу које се прати њихов рад и напредак.

**Кључне речи:** пројектна настава; настава математике; квиз.

---

## Шангајски проблем

Дејан Вурдеља

Прва економска школа, Петњска 5-7, Београд  
e-mail: dvurdelja@sbb.rs

**Апстракт.** Наведени логички задатак је задат ученицима узраста 15-16 година у Шангају на завршном тестирању. И као такав, пре свега нејасан, тежак, неразумљив, представљен је јавности на енглеском језику као нешто, што ето, морају да уче и савладају деца на далеком истоку. Касније се, у штампаном облику, појавио са решењем, скромним и нејасним, пре свега нетачним и конфузним, и на нашем поднебљу.

Аца и Бојан су се упознали са Дуњом и пошто су се брзо спријатељили, пожелели су да сазнају када је њен рођендан. Она им је дала 10 могућих датума:

- 15. мај
- 17. јун
- 14. јул
- 14. август
- 16. мај
- 18. јун
- 16. јул
- 15. август
- 19. мај
- 17. август

Дуња је онда сваком посебно саопштила само месец тј., само датум свог рођендана. Аца: Ја не знам када је Дуњин рођендан али сам сигуран да не зна ни Бојан. Бојан: У почетку нисам знао када је Дуњин рођендан али сада знам. Аца: Е сада и ја знам када је Дуњин рођендан. Знате ли и ви када је Дуњин рођендан? Решење сам направио као повер поинт презентацију и представио га у средњој школи где радим, на часу додатне наставе, као огледном часу! Реакција публике је била много боља



него што сам очекивао. При томе сам се потрудио да кроз решење користим само логику и то тако да свима присутним колегама (нематематичарима) а и ученицима, ниједан детаљ не буде стран тј. да решење буде крајње једноставно и разумљиво, свима јасно и прихватљиво. То би био уводни део, мало дужи али другачије не може. Потом, као разрада, иде следећи задатак: Аца, Бојан и Вера су се упознали са Дуњом и пожелели су да сазнају када је њен рођендан. Она им је дала 20 могућих датума:

- 17. фебруар 2001.
- 13. март 2001.
- 13. април 2001.
- 15. мај 2001.
- 17. јун 2001.
- 16. март 2002.
- 15. април 2002.
- 14. мај 2002.
- 12. јун 2002.
- 16. август 2002.
- 13. јануар 2003.
- 16. фебруар 2003.
- 14. март 2003.
- 11. април 2003.
- 16. јул 2003.
- 19. јануар 2004.
- 18. фебруар 2004.
- 19. мај 2004.
- 14. јул 2004.
- 18. август 2004.

Дуња је потом Аци саопштила месец, Бојану дан а Вери годину свог рођендана. Аца: Ја не знам када је Дуњин рођендан али сам сигуран да не зна ни Бојан. Бојан: Ни ја не знам када је Дуњин рођендан али знам да ни Вера не зна. Вера: Ја не знам када је рођендан али не зна ни Аца. Аца: Е сада знам када је рођендан. Бојан: Знам и ја. Вера: И ја знам. Када је Дуњин рођендан? И решење овог, много захтевнијег и занимљивијег задатка сам дао кроз повер поинт презентацију али нисам презентовао јавно. Оно што посебно даје дражје једна димензија више која се провлачи кроз овај проблем!

**Кључне речи:** шангајски проблем, шангајски задатак, шангајска мозгалица.

---

## Примена образовног софтвера Геогобра у обради наставних садржаја из стереометрије

Радослав Божић

*Гимназија "Светозар Марковић", Његошева 22, Нови Сад  
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com*

**Апстракт.** Стереометрија представља важан део градива у основном и средњем образовању. Пракса је, као и ранија истраживања, показала да значајан број ученика има потешкоће у савладавању овог дела градива. Ове потешкоће се углавном јављају када је потребно да ученици замисле, односно да скицирају одређено геометријско тело и да обележе његове елементе. Нарочито су присутне нејасноће код изучавања ротационих тела и њихових особина. Употреба софтвера који омогућава приказ тродимензионалних објеката може у многоме олакшати ученицима рад са геометријским телима. Један од софтверских пакета који су намењени за рад са тродимензионалним објектима је Геогобра. Овај образовни софтвер омогућава квалитетан приказ геометријских тела и њихових елемената на екрану, тако да посматрач стиче утисак тродимензионалности и да може да посматра представљени објекат из различитих углова. Рад у Геогобра 3Д окружењу, поред приказа појединачних геометријских тела, омогућава посматрање више геометријских тела истовремено, као и приказ њихових пресека. Такође,

комбиновање тродимензионалног приказа у Геогобра окружењу са динамичким својствима овог образовног софтвера омогућава посматрање настанка геометриских тела ротацијом равних фигура. Наведене особине образовног софтвера Геогобра омогућавају квалитетну визуелизацију тродимензионалних објеката, што може имати позитиван утицај на квалитет знања ученика у области стереометрије.

**Кључне речи:** Геогобра; Геометријска тела; Стереометрија; Тродимензионални приказ.

### Библиографија

- [1] **A. Baki, T. Kösa, B. Güven.** A comparative study of the effects of dynamic geometry software and physical manipulatives on pre-service mathematics teachers' spatial visualization skills. *British Journal of Educational Technology*, 2011, 42(2), 291–310.
  - [2] **Y.L. Cheng, K.S. Mix.** Spatial Training Improves Children's Mathematics Ability. *Journal of Cognition and Development*, 2014, 15(1), 2-11.
  - [3] **W.Y. Hwang, S.S. Hu.** Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers and Education*, 2013, 62, 308-319.
- 

## Dokazivanje nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije korišćenjem stepenih redova

**Tatjana Šimak**

*Osnovna škola „Maršal Tito“, Padina  
e-mail: 09anajtat@gmail.com*

**Zoran Z. Petrović**

*Matematički fakultet, Beograd  
e-mail: zoranp@matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** U poslednjih nekoliko godina, objavljeno je više radova B. Maleševića i njegovih saradnika u kojima se dokazuju nejednakosti u kojima se pojavljuju polinomi i trigonometrijske/hiperboličke funkcije, a koje se dokazuju korišćenjem konačnih Tejlorovih razvoja pomoću kojih se dokaz nejednakosti svodi na ispitivanje znaka polinoma, koji se potom ispituje numeričkim metodama. Svrha ovog rada je da se pokaže kako se punim razvojem u stepeni red nejednakosti među takvim funkcijama mogu svesti na nejednakosti među prirodnim brojevima koje se potom relativno lako dokazuju. Predmet ovog rada su samo nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije mada se sličan metod može primeniti i za trigonometrijske funkcije.

**Кључне речи:** hiperboličke funkcije; Tejlorov razvoj; nejednakosti.

### Библиографија

- [1] **R. Klén, M. Visuri and M. Vuorinen.** On Jordan type inequalities for hyperbolic functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010:362548 (2010), 14 pages.
  - [2] **M. Makragić.** A method for proving some inequalities on mixed hyperbolictrigonometric polynomial functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 11 (2017), 817–829.
  - [3] **E. Neuman, J. Sándor.** On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, 13 (2010), 715–723.
-

## Калкулатор у настави математике-да, можда, не?

Татјана Станковић

*ЕТШ „Никола Тесла”, Панчево  
e-mail: t.stankovic12@gmail.com*

**Апстракт.** Савремена настава математике захтева примену информационо-комуникационих технологија у процесу учења. Поставља се питање да ли применити, у којој мери и на који начин калкулаторе у настави математике средње школе тако да ова примена позитивно утиче на процес стицања знања и да додатно мотивише ученике да активно учествују у наставном процесу. У циљу проналаска одговора на ова питања, у овом раду аутор ће поделити своје искуство и сазнања у вези са применом калкулатора у настави математике до којих је дошао у раду са ученицима једног одељења првог разреда трећег степена Електротехничке школе „Никола Тесла” у Панчеву. Такође, биће презентован и став ученика овог одељења према математици.

**Кључне речи:** калкулатор; настава математике; мотивација ученика.

---

## Истраживачки пројекти у настави математике

Душица Марковић

*Основна школа „Стефан Немања”  
e-mail: dusicamarkovic33@hotmail.com*

**Апстракт.** Предавање илуструје креативан концепт организације наставе математике кроз рад на пројекту. Овакав тип ангажовања ученика подразумева тимски рад у коме је садржана двострука релација од општег (групног) ка појединачном (индивидуалном облику рада) и обрнуто. У дидактичком смислу подстиче се сарадничко и вршњачко учење и индивидуализовани концепт. Циљ предавања је приказ инквјери приступа у настави математике. Полазиште чини хеуристички и логичко-критички рад на проблему (изабраној теми). Практично-делатне активности се уводе у виду идеја, вештина и ставова ученика и приводе конструктивистичком приступу (изради пројекта). Улога наставника је суштинска. Предавање систематизује едукативни процес и градуира три сегмента рада. У првом је приказана теоријска генеза методологије пројектног рада. Главни део, кроз поједностављене шеме, објашњава поступак писања предлога пројекта и апострофира, како мало заправо значи много, уколико је одабир теме добар и ако се поставе јасни циљеви, дефинишу активности и предвиде методе рада. Кроз појединачну анализу пројеката наставника и ученика конкретизују се различита решења истог проблема. Трећи део улази у креативност и стваралаштво учесника симпозијума и реализује се кроз индивидуалне радове колега у свом радном окружењу.

**Кључне речи:** Креативност; пројекат; инквјери метода; тимски и индивидуални облик рада.

---

## Application of FPGA chip for high precision calculations

**Miljan Đorđević**

*Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade  
e-mail: dm170264d@student.etf.bg.ac.rs*

**Pavle Radojković**

*Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade*

**Dragica Stoiljković**

*Student at School of Electrical Engineering, University of Belgrade*

**Abstract.** This paper presents one implementation of FPGA chip optimised for high precision (128bit) calculations. It is used for visualization of some mathematical functions and for comparison between approximations such as Taylors series and those obtained by Remez algorithm.

**Keywords:** FPGA; Taylor series; Remez algorithm.

### References

- [1] **F. Barahona, M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt.** An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operation Research*, 1988, 36, 493 - 513.
  - [2] **A. Hertz, E. Taillard, D. de Werra.** Tabu search. In: *E. Arts and J.K. Lenstra (eds.), Local Search in Combinatorial Optimization, Wiley, Chichester, 1997*, pp. 121 - 136.
  - [3] **G. Pataki, S. Schmieta.** The DIMACS library of semidefinite - quadratic - linear programs. *Technical report, Computational Optimization Research Center, Columbia University, 2002.*
- 

## Embeddings of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in $\mathbb{R}^n$

**Miloš Arsenović**

*Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

**Tanja Jovanović**

*Faculty of Sciences, University of Priština-Kosovska Mitrovica, Lole Ribara 29, 38220 Kosovska Mitrovica, Serbia  
e-mail: tanja.jovanovic@pr.ac.rs*

**Abstract.** The main result of this paper is the embedding

$$\mathcal{B}_\beta^{s,r}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{B}_{\beta+(n-1)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s_1}\right)}^{s_1,r_1}(\Omega),$$

$0 < r \leq r_1 \leq \infty$ ,  $0 < s \leq s_1 \leq \infty$ ,  $\beta > -1$ , of harmonic functions mixed norm spaces on a smoothly bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . We also extend a result on boundedness, in mixed norm, of a maximal function-type operator from the case of the unit disc and the unit ball to general domains in  $\mathbb{R}^n$ .

**Keywords:** Mixed norm spaces, Harmonic functions spaces, Maximal functions

## References

- [1] G. H. Hard., J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. *Math., Z.*, 1932, 34, 403-439.
- [2] G. H. Hard., J. E. Littlewood. Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions. *Quart. J. Math. (Oxford)*, 1941, 12, 221-256.
- [3] J. M. Ortega, J. Fabrega. Mixed norm spaces and interpolation. *Studia Mathematica (in Barselona)*, 1994, 3, 109.
- [4] M. A. Raguse, A. Scapellato. Mixed Morrey spaces and their applications to partial differential equations. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 2017, 151, 51-65.
- [5] F. Ricci, M. Taiblesson. Boundary Values of Harmonic Functions in Mixed Norm Spaces and Their Atomic Structure. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 1983, tome 10, no 1, 1-54.
- [6] K. Avetisyan, Y. Tonoyan. Continuous Embeddings in Harmonic Mixed Norm Spaces on the Unit Ball in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2012, Volume 47, Issue 5, 209-220.
- [7] V. S. Guliyev, M. N. Omarova, M.A. Raguse, A. Scapellato. Commutators and generalized local Morrey spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, 457 n.2, 1388-1402.
- [8] A. Scapellato. New perspectives in the theory of some function spaces and their applications. *AIP Conference Proceedings*, 2018, Volume 1978, Article number 140002.
- [9] A. Scapellato. Homogeneous Herz spaces with variable exponents and regularity results. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018, Vol. 82, 1-11.
- [10] K. L. Avetisyan. Fractional integro-differentiation in harmonic mixed norm spaces on a half-space. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2001, 42, 4, 691-709.
- [11] M. Pavlović. Function Classes on the Unit Disc. *de Gruyter*, 2013.
- [12] O. R. Mihić. Some Properties of Quasilinearly Subharmonic Functions and Maximal Theorem for Bergman Type Spaces. *Hindawi Publishing Corporation, ISRN Mathematical Analysis*, Volume 2103.
- [13] C. Fefferman, E. M. Stein. Hp spaces of several variables. *Acta Math.*, 1972, 129, 137-193.
- [14] J. Riihenta. A Generalized Mean Value Inequality for Subharmonic Functions. *Expo. Math.*, 2001, 19, 187-190.
- [15] M. Pavlović. On subharmonic behaviour and oscillation of functions on balls in  $\mathbb{R}^n$ . *Potential Anal.*, 2008, 29, 89-104.

## Modeli klasifikacije egzoplaneta prema potencijalnoj nastanjivosti dobijeni metodama mašinskog učenja

Iva Čvorović – Hajdinjak

*Matematički Fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija*  
*e-mail: iva.cvorovic@gmail.com*

**Apstrakt.** Proučavanje svemira već stotinama godina omogućava ljudima da shvate veličinu, kompleksnost i raznolikost koja postoji u univerzumu, kao i da iz druge perspektive sagledaju i razumeju život na Zemlji. Poslednjih decenija je razvoj tehnologije omogućio da se potvrde ranije pretpostavke da je postojanje planeta oko zvezda uobičajena pojava, ali i da Sunčev sistem nema formu koja je jedinstvena, već da je svaki planetarni sistem specifičan na svoj način. Od lansiranja teleskopa Kepler 2009. godine, uočen je značajan broj planeta van Sunčevog sistema. Fokus te misije je bio pronalaženje planeta koje se nalaze ili su u blizini nastanjive zone svoje majke zvezde. Ova misija je rezultovala velikom količinom podataka, zbog čega se javila potreba za automatizacijom njihove obrade. Ideja ovog rada je ispitivanje tačnosti kategorizacije novootkrivenih egzoplaneta prema njihovoj potencijalnoj nastanjivosti, korišćenjem različitih metoda mašinskog učenja. Potencijalna nastanjivost je utvrđena na osnovu dostupnih karakteristika planeta, korišćenjem definisanih metoda. Podaci su nakon izračunavanja potrebnih parametara obrađivani algoritmima mašinskog učenja, koji koriste statističke metode da bi utvrdili klasifikaciju. Metode mašinskog učenja koje su korišćene su: metoda slučajnih šuma, metoda potpornih vektora i metoda k najbližih suseda. Na kraju je analizirana tačnost predikcije svakog od ovih algoritama na skupu podataka egzoplaneta.

**Ključne reči:** egzoplanete; mašinsko učenje; nastanjivost.

### Bibliografija

- [1] **R.L. Akeson, X. Chen, D. Ciardi** The NASA Exoplanet Archive: Data and Tools for Exoplanet Research. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 2013.
- [2] **Kashyap J. Madhu** Earth Similarity Index and Habitability Studies of Exoplanets. *Department of Physics and Electronics, Christ University, Bengaluru*, 2017.
- [3] **N. Bogunović** Algoritmi strojnog učenja – 1, Strojno učenje. *Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Hrvatska*, 2017.
- [4] **R.P. Butler, G.W. Marcy, S.S. Vogt** On the double-planet system around HD 83443. *The Astrophysical Journal, American Astronomical Society*, 2002.
- [5] **R.P. Butler, J.T. Wright, G.W. Marcy** Catalog of nearby exoplanets *The Astrophysical Journal, American Astronomical Society*, 2006.
- [6] **Đ. Marković** O verovatnoći sudara intergalaktičkih meteora i potencijalno nastanjivih ekstrasolarnih planeta. *Mametamički fakultet u Beogradu*, 2016.
- [7] **O. Harrison** Machine Learning Basics with the K-Nearest Neighbors Algorithm, 2018.
- [8] **M.H. Hart** (1979) Habitable zones about main sequence stars, 1979.
- [9] **J. Vander Plas** (2016) Python Data Science Handbook, 2016.
- [10] **J.F. Kasting, D.P. Whitmire, R.T. Reynolds** Habitable Zones around Main Sequence Stars, 1993.
- [11] **R.K. Kopparapu** A revised estimate of the occurrence of terrestrial planets in the habitable zones around Kepler M-dwarfs, 2013.
- [12] **R.K. Kopparapu, R. Ramirez, F.J. Kasting** Habitable Zones Around Main-Sequence Stars: New Estimates, 2013.
- [13] **A. Kovač evič** Astrobiologija. *Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet*, 2016.
- [14] **U. Malik** Implementing SVM and Kernel SVM with Python's Scikit-Learn, 2018.
- [15] **D. Overbye** Far-Off Planets Like the Earth Dot the Galaxy. *The New York Times*, 2013.
- [16] **G. Prashant** Decision Tree in Machine Learning, 2017.
- [17] **S. Rahul** How Decision Tree Algorithm Works, 2017.
- [18] **M. Rajeev** Predicting habitable exoplanets from NASA's Kepler mission data using Machine Learning, 2017.
- [19] **R. Gandhi** Support Vector Machine — Introduction to Machine Learning Algorithm, 2018.
- [20] **J. Schneider, C. Dedieu, P. Le Sidaner** Defining and cataloging exoplanets: the exoplanet.eu database, 2011.
- [21] **S. Raschka, V. Mirjalili** Python Machine Learning, 2017.
- [22] **S. K. Lodha, R. Franke** Scattered Data Interpolation: Radial Basis and Other Methods, 2002.
- [23] **T. Yiu** Understanding Random Forest, 2012.
- [24] <http://eastro.berkeley.edu>
- [25] <http://ebritannica.com>
- [26] <http://exoplanet.eu>
- [27] <http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog/data/database>
- [28] <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/data.html>
- [29] [https://nasa.gov/mission\\_pages/kepler/overview/index.html](https://nasa.gov/mission_pages/kepler/overview/index.html)
- [30] <http://news.cornell.edu>
- [31] <http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog/data>
- [32] [https://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/tree/plot\\_unveil\\_tree\\_structure.html](https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/tree/plot_unveil_tree_structure.html)
- [33] <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.mixture.GaussianMixture.html>
- [34] <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.neighbors.KNeighborsClassifier.html>
- [35] <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.ensemble.RandomForestClassifier.html>
- [36] <http://scikit-learn.org/stable/modules/svm.html>
- [37] <https://scikit-learn.org/stable/downloads/scikit-learn-docs.pdf>
- [38] <http://spaceflightinsider.com>.
- [39] <http://svejefizika.wordpress.com>
- [40] <http://towardsdatascience.com>
- [41] <http://wikipedia.org>
- [42] <http://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603/>
- [43] <http://zemris.fer.hr>
- [44] <https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603/>

---

## Optical spectral parameters correlations in an SDSS sample of type 1 quasars

**Isidora Jankov**

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: jankov.isidora@gmail.com*

**Dragana Ilić**

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: dilic@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** Investigation of quasar emission line properties and relationships between spectral parameters is important for understanding the physical mechanisms that originate inside different regions of the active galactic nuclei. In this contribution, we investigate the optical spectral parameters of type 1 quasars taken from the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Quasar Catalog [ 1]. Spectral parameters, such as equivalent widths and full widths at half maximum of both narrow and broad lines are taken into account. We perform the analysis of correlation matrix and principal component analysis (PCA) of our sample. The PCA proved that the so-called Baldwin effect (an anti-correlation between the line equivalent width and continuum luminosity) is present in narrow lines, and deserves further investigation. We analyze the influence of the host galaxy starlight to the Baldwin effect, and test how radio-loudness of the quasars, ionization potentials and critical densities of different narrow emission lines affect the parameter that describes the Baldwin effect and compare our results with previous studies [ 2].

**Keywords:** galaxies: active galaxies; active galactic nuclei: quasars: emission lines; multivariate analysis: principal component analysis.

### References

- [1] **Y. Shen, G. T. Richards, M. A. Strauss, et al.** A Catalog of Quasar Properties from Sloan Digital Sky Survey Data Release 7. *The Astrophysical Journal Supplement*, 2011, 194, 45.
- [2] **K. Zhang, T. Wang, C. M. Gaskell, et al.** The Baldwin Effect in the Narrow Emission Lines of Active Galactic Nuclei. *The Astrophysical Journal*, 2013, 762, 51.

---

## Однос висине хомогеног новчића и вероватноће пада на ивицу

Данијел Алексић

*Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија  
e-mail: danijel.aleksic98@gmail.com*

**Апстракт.** Циљ рада јесте да одговори на питање чији се одговор чини лако израчунљивим: Колико треба да буде дебео новчић да вероватноћа пада на ивицу била тачно  $1/3$ ?

За почетак се износе познати математички модели и резултати до којих се дошло у ранијим истраживањима, даје се критички осврт на њих и износе се њихови главни недостаци.

Затим се, уз отклоњене недостатке које су имали ранији резултати, врши понављање експеримента који тестира већ раније тестиран модел са односом дебљине и пречника основе од  $1 : \sqrt{3}$ , а по први пут врши се тестирање модела са односом  $1 : 2$ .

Рад за циљ има да се при много ригорознијим условима него у ранијим радовима експериментално провере теоријски резултати до којих се дошло, као и да се подаци анализирају на начин на који то у наведеним радовима није рађено.

Коришћене су познате методе математичке статистике које до сада на овом проблему нису примењиване. Резултати до којих се дошло нису сагласни са свим ранијим и умногоме су неочекивани.

**Кључне речи:** дебљина новчића и вероватноћа; статистика; хипотеза.

### Библиографија

- [1] **Ее Hou Yong, L. Mahadevan.** Probability, geometry, and dynamics in the toss of a thick coin. *American Journal of Physics* 79, 2011.
  - [2] **Persi Diaconis, Susan Holmes, Richard Montgomery.** Dynamical Bias in the Coin Toss. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2007.
- 

## Поређење методе момената и методе максималне веродостојности на примеру померене експоненцијалне расподеле

Александра Здравковић

Математички факултет, Студентски трг 16  
e-mail: azdravkovic98@gmail.com

Коста Љујић

Математички факултет, Студентски трг 16  
e-mail: ljujickosta@gmail.com

**Апстракт.** Често се за оцењивање параметара узорка из померене експоненцијалне расподеле користе метод момената и метод максималне веродостојности.

Анализирали смо како се оцене добијене овим методима понашају у различитим ситуацијама и уочили да се њихов квалитет значајно погоршава убацивањем левих аутлајера. Квалитет смо испитивали методом Монте Карла, на основу великог броја понављања експеримента.

У нашем раду предлажемо нову, робусну, оцену једног од параметара померене експоненцијалне расподеле, која се показала као много отпорнија на аутлајере од оцена добијених методом момената и методом максималне веродостојности.

**Кључне речи:** оцене параметара; експоненцијална расподела; статистика.

### Библиографија

- [1] **Бојана Милошевић.** Белешке са предавања курса Увод у статистику *Математички факултет*, 2019
  - [2] **R. Larsen, M. Marx.** *An Introduction to Mathematical Statistics and its Application*, 5th edition, 2011
- 

## GeoDemonstrator

Лазар Васовић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд  
e-mail: mi16099@alas.matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** GeoDemonstrator је апликација написана са циљем да корисника ближе упути у геометријске трансформације у равни. Замисао је омогућити једноставно интерактивно приказивање



и лакше разумевање материје која се, између осталог, обрађује на неколико предмета на основним академским студијама информатике (И смер) на Математичком факултету Универзитета у Београду. Програм се састоји из неколико делова који чине целину. У првом делу, корисник се кроз интерактивни интерпретатор упознаје са математичким основама геометријских трансформација. У наредном, упознаје се са применом афиних пресликавања, пратећи притом шта се тачно дешава приликом саме трансформације. У трећем и четвртном делу, упознаје се са применом пројективних пресликавања, и то кроз проблем отклањања перспективне дисторзије односно ректификације произвољне четворке тачака у општем положају, као и проблем прављења панорама од преклапајућих слика.

**Кључне речи:** визуелизација пресликавања; афино пресликавање; пројективно пресликавање; перспективна дисторзија; панорама.

---

## Integralna kriptanaliza AES-a sa tajnim S-Box-om - teorija i implementacija

Dejan Kovač

*Matematički fakultet, Beograd  
e-mail: dejankov11@gmail.com*

**Apstrakt.** AES kriptosistem predstavlja najpopularniji kriptosistem u oblasti simetrične kriptografije, i kao takav nalazi svakodnevnu upotrebu u softverskim aplikacijama, komunikacionim protokolima i hardverskim komponentama. On vrši enkripciju podataka deleći ih na nezavisne blokove fiksne veličine (128, 196, 256 bitova), nad kojima zatim vrši standardom predviđene transformacije. Jedna od najbitnijih komponenti AES-a je S-box koji vrši permutacije nad bitovima u svakom bloku, i predstavlja ključan stub odbrane protiv klasičnih tehnika kriptanalize, kao što su linearna i diferencijalna kriptanaliza. I ako je S-box definisan AES standardom, i predstavlja fiksnu komponentu sistema, postavlja se pitanje kako se sigurnost sistema menja u slučaju odabira nepoznatog i slučajno generisanog S-box-a?

U ovom radu će biti pokazano da sakrivanje i korišćenje slučajno generisanog S-box-a čini AES podložnim napadu zasnovanom na integralnoj kriptanalizi. Napad se sastoji iz više komponenti i kombinuje tehnike prethodno prikazane u analizama SQUARE kriptosistema i opštih SASAS struktura. U radu će biti diskтовane matematičke osnove napada, i biće prikazani detalji računarske implementacije. Rad je zasnovan na rezultatima Tiessen-a i koautora koji je prikazan i objavljen na FSE konferenciji u Istanbulu 2015. godine.

**Кључне речи:** AES, S-box, Square napad, SASAS.

### Bibliografija

- [1] **T. Tiessen, L.R. Knudsen, S. Kölbl, M. Laurdisen** Security of the AES with a Secret s-box. *Cryptology ePrint Archive, Report 2015/144*, 2015.
- [2] **J. Daemen, L.R. Knudsen, V. Rijmen** The block cipher Square. In: *E. Biham (eds), Fast Software Encryption, FSE '97, volume 1267 of LNCS*, 1997, pp. 149–165.
- [3] **A. Biryukov, A. Shamir**. Structural cryptanalysis of SASAS. In: *B. Pfitzmann (eds), EUROCRYPT 2001, volume 2045 of LNCS*, 2001, pp. 394–405.

## Сафир: Употреба линеарних трансформација као додатак за 3D софтвер SketchUp

Милена Стојић

Математички факултет

e-mail: mi16096@alas.matf.bg.ac.rs

Дуња Спасић

Математички факултет

e-mail: mi16073@alas.matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Пројекат Сафир чине два додатка (енгл. *plugin*) за софтвер *SketchUp*, који се користи за генерисање једноставнијих, али и комплексних тродимензионалних фигура. Циљ имплементације је да се кориснику олакша и скрати примена композиције основних геометријских трансформација као и стварање нових, сложених објеката. Оба додатка се заснивају на скалирању, translацији и просторној ротацији око произвољно задате осе приказујући огроман спектар могућности који пружају ове наизглед једноставне трансформације. Код је писан у *Ruby* програмском језику, у коме је програмиран и сам софтвер. Додатак који трансформише објекте функционише тако што се селекује група објеката који ће се ротирати, задаје се оса ротације, а затим се бира број симетрија које ће имати објекат и број итерација који ће бити примењен. Други додатак формира нови објекат сачињен од групе квадрова који су произвољан број пута ротирани и затим транслирани око одабране главне осе координатног система. Овај додатак пружа кориснику више опција, од којих су неке: димензије, боје и број квадрова, размак међу квадровима и начин на који су распоређени у слојевима. Комбиноване, ове две функционалности могу да дају занимљиве конструкције. Осим за дизајн сложених апстрактних фигура, додаци могу да буду корисни при дизајнирању кружних грађевина али и осмишљавању нових објеката.

**Кључне речи:** *SketchUp* софтвер, линеарне трансформације, програмски језик *Ruby*, генерисање облика

---

## Primena kvantne Furijeove transformacije u programskom jeziku Python

Aleksandar Mladenović

Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija

e-mail: a.mladenovic96@gmail.com

Vladimir Mandić

Matematički fakultet, Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija

e-mail: vladimir.mandic10@gmail.com

**Апстракт.** У квантном програмiranju, квантна Фуријеова трансформација (КФТ) је линеарна трансформација на квантним битовима (кјубитима) и она је квантни аналог инверзне дискретне Фуријеове трансформације. У овом раду ћемо приказати најпре имплементацију класа за рад са комплексним бројевима, квантним битовима, квантним битовима на Блоховој сфери и саме функције КФТ. Затим ћемо приказати примену КФТ на skupove таčака у равни који чине познате геометријске облике, као што су квадрат, попунjeni квадрат, круг, попунjeni круг, trougao, попунjeni trougao. Затим ћемо приказати dejstvo КФТ на skupovima кјубита у 3D: на Блоховој сфери и elipsoidu,

kao i na kocki. Prikazaćemo i transformaciju kompleksne sinusoide sa proizvoljnim šumom. Projekat je u vidu Jupyter notebook datoteke u kojoj su izvršena sva izračunavanja i grafički prikaz transformacija.

**Ključne reči:** Kvantna informacija; Kvantno programiranje; Kvantna Furijeova transformacija

### Bibliografija

- [1] **M. Nielsen, I. Chuang** Quantum Computation and Quantum Information. I *Cambridge: Cambridge University Press.*
- 

## O broju nizova jedinstvene vrednosti maksimalne dužine u polugrupi matičnih jedinica

**Nikola Velov**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu  
e-mail: nikola.velov@gmail.com*

**Apstrakt.** U svom radu [ 1], Sokoloski i Blaževski uvode pojam *niza jedinstvene vrednosti* u polugrupi, kao niz elemenata koji pomnoženi u redosledu kojim su numerisani daju neku vrednost  $v$ , i za svaku permutaciju redosleda množenja se vrednost  $v$  ne dobija. Posmatraju polugrupu "matičnih jedinica", koju čine  $n \times n$  matrice koje su ispunjene nulama i imaju najviše jednu jedinicu, i formulišu hipotezu o broju nizova jedinstvene vrednosti u toj polugrupi maksimalne moguće dužine. U ovom radu dokazujemo njihovu hipotezu iz 2005. da je broj ovakvih nizova tačno  $\frac{(2n)!}{(n+1)!} = n! \cdot C_n$ , gde je  $C_n$   $n$ -ti Katalanov broj, konstruisanjem pogodne bijekcije. Dodatno, dajemo elementaran dokaz da je maksimalna dužina niza jedinstvene vrednosti u ovoj polugrupi  $2n - 1$ , koji se oslanja samo na Dirihleov princip, i time izbegavamo pozivanje na Amitsur-Levitzki teoremu koju autori koriste u svom radu.

**Ključne reči:** niz jedinstvene vrednosti; Katalanovi brojevi; matrice.

### Bibliografija

- [1] **A. Blaževski, P. Sokoloski** Conceptual introduction to unique-valued sequences. *Proceedings of III congress of mathematicians of Macedonia Struga, Macedonia, , 29.IX-2.X-2005* Pages 207-216
-

## CvExpress

**Lea Petković**

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Republika Srbija*

**Bojana Ristanović**

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Republika Srbija*

**Nikola Stamenić**

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Republika Srbija*

**Apstrakt.** CvExpress ima za cilj da na osnovu podataka i želja (vezanih za sam dizajn) kreira odgovarajući CV korisniku. Program nudi razumljiv grafički korisnički interfejs pomoću kog korisnik unosi potrebne podatke. U pozadini se generiše  $\text{\LaTeX}$  datoteka, a korisniku se isporučuje PDF datoteka. Nakon pokretanja programa, korisnik ima uvid u album sa slikama CV-eva. Na osnovu datih slika bira dizajn, zatim dobija odgovarajući GUI u odnosu na načinjeni izbor, i kreće u izradu. Ima mogućnost da upisuje neophodne i željene informacije, kao i da doda svoju fotografiju. Na kraju svakog grafičkog korisničkog interfejsa nalazi se dugme čiji klik označava početak izrade CV-a. Posle kratkog čekanja da se CV generiše, dobija obaveštenje o završetku izrade. Program je napisan u programskom jeziku Ruby i koristi biblioteku FXRuby kako bi kreirao odgovarajući GUI.

---

## Žulijev i Mandelbrotov skup

**Nikola Ubavić**

*Matematički fakultet, Beograd  
e-mail: mm16310@alas.matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Rad se sastoji iz dva dela. U prvom delu definisani su osnovni skupovi kompleksne dinamike: Žulijev i Mandelbrotov skup. Zatim su iznete i dokazane teoreme koje bolje opisuju navedene skupove. Većina dokaza koristi samo elementarne rezultate kompleksne analize i topologije. U drugom delu rada opisani su najznačajniji algoritmi za crtanje Žulijevog i Mandelbrotovog skupa. Svi algoritmi su opravdani dokazima iz prvog dela rada. Rad sadrži i oko 50 slika koje su nacrtane uz pomoć programa *Julia* [ 1] koji je istovremeno napisan sa radom.

**Ključne reči:** Kompleksna dinamika, Žulijev skup, Mandelbrotov skup

## Bibliografija

[1] N. Ubavić Julia. Dostupno na adresi <https://github.com/ubavic/julia>.

---