

УНИВЕРЗИТЕТУ БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

# КЊИГА АПСТРАКТА

THE BOOK OF ABSTRACTS  
XI SYMPOSIUM "MATHEMATICS AND APPLICATIONS"  
3<sup>rd</sup> December and 4<sup>th</sup> December, 2021.

XI СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
3. децембар и 4. децембар 2021.



КЊИГА АПСТРАКАТА – XI СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
3. децембар и 4. децембар 2021.

*Издавач:*

Универзитет у Београду  
Математички факултет

*За издавача:*

проф. др Зоран Ракић, декан

*Главни и одговорни уредник:*

доц. др Миљан Кнежевић

*Уредник:*

доц. др Александра Делић

*Припрема за штампу:*

доц. др Миљан Кнежевић  
доц. др Александра Делић  
Марек Светлик  
Ђорђе Стакић

*Корице:*

доц. др Миљан Кнежевић

*Штампа:*

Донат Граф

*Тираж:*

85 примерака

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

51-7(048)(0.034.2)

371.3::51(048)(0.034.2)

**СИМПОЗИЈУМ "Математика и примене" (11 ; 2021 ; Београд)**

Књига апстраката [Електронски извор] / XI симпозијум "Математика и примене", 3. децембар и 4. децембар 2021., [Београд] = The book of abstracts / XI Symposium "Mathematics and Applications", 3rd December and 4th December 2021., [Belgrade] ; [главни и одговорни уредник Миљан Кнежевић]. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2021 (Београд : Донат Граф). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM) ; 12 cm

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловне стране документа. - Текст на срп. и енгл. језику. - Тираж 85. - Библиографија уз већину апстраката.

ISBN 978-86-7589-155-0

а) Математика -- Апстракти б) Математика -- Настава -- Апстракти

COBISS.SR-ID 52683785

## Програмски одбор XI Симпозијума „Математика и примене”

- **проф. др Миодраг Матељевић**,  
академик САНУ, председник одбора,
- **проф. др Бранислав Боричић**,  
проректор Универзитета у Београду, редовни професор Економског факултета,
- **проф. др Зоран Ракић**,  
декан Математичког факултета,
- **проф. др Александар Липковски**,  
редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Зорица Станимировић**,  
редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Мирослав Марић**,  
редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Небојша Икодиновић**,  
ванредни професор Математичког факултета,
- **проф. др Драгана Илић**,  
ванредни професор Математичког факултета,
- **доц. др Бојана Милошевић**,  
доцент Математичког факултета,
- **доц. др Миљан Кнежевић**,  
доцент Математичког факултета,
- **доц. др Нина Радојичић Матић**,  
доцент Математичког факултета,

## Организациони одбор XI Симпозијума „Математика и примене”

- **доц. др Миљан Кнежевић**,  
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, председник одбора,
- **проф. др Зорица Станимировић**,  
редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Александра Делић**,  
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Душан Онић**,  
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Марек Светлик**,  
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **Ђорђе Стакић**,  
асистент Економског факултета Универзитета у Београду,
- **Душица Браловић**,  
сарадник у настави, Математички факултет Универзитета у Београду,
- **Нада Ђорђевић Веселиновић**,  
шеф Рачунарске лабораторије Математичког факултета Универзитета у Београду



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЈЕДНАЕСТИ СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”  
НАЦИОНАЛНИ СКУП СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

Програм првог дана Симпозијума одржава се у свечаној сали Општине  
Стари Град,  
Македонска 42

Програм другог дана Симпозијума одржава се у просторијама  
Математичког факултета,  
Студентски трг 16

ПРОГРАМ

1. ДАН, ПЕТАК 3. ДЕЦЕМБАР 2021.

10:00 – 11:50, Свечана сала Општине Стари град

10:00 – 10:15
<b>Отварање скупа:</b> <b>Зоран Ракић</b> , декан Математичког факултета Универзитета у Београду <b>Бранислав Боричић</b> , проректор Универзитета у Београду
10:15 – 10:30
<b>Обраћање председника програмског одбора:</b> <b>Миодраг Матељевић</b> , академик САНУ
10:30 – 11:10
<b>Vladimir Dragović</b> , University of Texas at Dallas, USA
<i>“Dynamics of extremal polynomials, Painleve VI equations and isoharmonic deformations”</i>
11:10 – 11:50
<b>Andrei Vesnin</b> , National Research Tomsk State University, Russia
<i>“Hyperbolic knots, right-angled Coxeter groups and ideal polyhedra”</i>

Пауза за кафу и освежење 11:50 – 12:15

12:15 – 13:45, Свечана сала Општине Стари град

Председавајући: Милош Арсеновић

12:15 – 12:45
<b>Luigi D’Onofrio</b> , University of Napoli "Parthenope", Italia
<i>“A sense preserving Sobolev homeomorphism with negative Jacobian almost everywhere”</i>
12:45 – 13:15
<b>Danijela Damjanović</b> , Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden
<i>“Local rigidity for parabolic affine actions”</i>

13:15 – 13:45
<b>Oleksandr Dovhopiatyi</b> , Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine <b>Evgeny Sevost'yanov</b> , Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine
<u><i>“On compactness of classes of solutions of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretics-set type”</i></u>

Пауза за кафу и освежење 13:45 – 14:10

14:10 – 15:40, Свечана сала Општине Стари град

**Председавајући: Миљан Кнежевић**

14:10 – 14:40
<b>David Kalaj</b> , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro
<u><i>“Hölder continuity of qc harmonic mappings between smooth domains”</i></u>
14:40 – 15:10
<b>Andrea Seppi</b> , Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, France
<u><i>“Rigidity of minimal Lagrangian diffeomorphisms between spherical cone surfaces”</i></u>
15:10 – 15:40
<b>Miloš Arsenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Miodrag Mateljević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u><i>“On Holder continuity of O-homeomorphisms”</i></u>

Пауза за кафу и освежење 15:40 – 16:00

16:00 – 17:00, Свечана сала Општине Стари град

**Председавајући: Марко Радовановић**

16:00 – 16:30
<b>Adel Khalfallah</b> , Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia <b>Војана Purtić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Miodrag Mateljević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u><i>“Schwarz-Pick Lemma for Harmonic and Hyperbolic Harmonic Functions”</i></u>
16:30 – 17:00
<b>Душан Дробњак</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Игор Уљаревић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u><i>„Егзотични симплектоморфизми и контактна дејства круга”</i></u>

17:00 Коктел

## 2. ДАН, СУБОТА 4. ДЕЦЕМБАР 2021.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС  
10:00 – 17:40 САТИ, САЛА 718/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Горан Банковић

10:00 – 10:30
Oleg Ivrii, Tel Aviv University, Israel
<u>“Critical values of inner functions”</u>
10:30 – 10:50
Marijan Marković, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro
<u>“Hardy-Littlewood theorems and the Bergman distance”</u>
10:50 – 11:10
Nebojša Ikodinović, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Internal logic of Probabilistic Systems”</u>
11:10 – 11:30
Miloš Arsenović, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Moduli of continuity of harmonic quasiconformal mappings - an overview”</u>
11:30 – 11:50
Danko R. Jocić, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Arithmetic-geometric means and Young norm inequalities for accretive operators”</u>
11:50 – 12:10
Miljan Knežević, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
Marek Svetlik, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Distortion theorems and estimates of Schwarz-Pick type for harmonic quasiconformal mappings - Review of the results of the Seminar for Complex Analysis in Belgrade”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Небојша Икодиновић

12:30 – 12:50
Милош Ђорић, Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Неке реалне хиперповрши близу Келерове многострукости <math>S^3 \times S^3</math>”</u>
12:50 – 13:10
Миодраг Матељевић, Српска академија наука и уметности
Никола Мутавцић, Математички институт САНУ
<u>„Шварцова лема на граници за хармонијска и плурихармонијска прсликавања и неке генерализације”</u>
13:10 – 13:30
Горан Банковић, Универзитет у Београду, Математички факултет
Драган Ђокић, Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Шести момент Dirichlet-ових L-функција над рационалним функцијским пољима”</u>

13:30 – 13:50
<b>Marija Mikić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Đorđe Krtnić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Cauchy problem for the Emden-Fowler equation with initial point on the positive part of y-axis”</u>
13:50 – 14:10
<b>Bojan Bašić</b> , Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad <b>Anna Slivková</b> , Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
<u>“On tessellations and the Heesch number in large dimensions”</u>
14:10 – 14:30
<b>Maja Roslavcev</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Gröbner bases over commutative von Neumann regular rings”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:40

Председавајући: Марија Микић

15:00 – 15:20
<b>Marko Pešović</b> , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering <b>Zoran S. Pucanović</b> , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering
<u>“A Note on the Generalized Narayana’s Cows Sequence”</u>
15:20 – 15:40
<b>Данијела Бранковић</b> , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет <b>Жарко Мијајловић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Фридманове једначине као динамички систем”</u>
15:40 – 16:00
<b>Jelena Gajić</b> , Faculty Of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka, Republic of Srpska
<u>“Estimates of distance and gradient for positive pluriharmonic functions in the unit polydisc in <math>C^n</math>”</u>
16:00 – 16:20
<b>Dragoljub J. Kečkić</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Srđan Stefanović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Isolated points of Birkhoff-James orthograph in <math>C^*</math>-algebras”</u>
16:20 – 16:40
<b>Ivan Dimitrijević</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Cosmological Solutions of a Nonlocal Gravity Model”</u>
16:40 – 17:00
<b>Биљана Радичић</b> , Универзитет Сингидунум, Београд
<u>“О нормама <math>k</math>-циркуларних матрица са Фибоначијевим бројевима”</u>
17:00 – 17:20
<b>Zoran Jasak</b> , Finra Tuzla - Elektrotehnička skola Tuzla, Bosna i Hercegovina <b>Elvir Čajić</b> , Finra Tuzla - Elektrotehnička skola Tuzla, Bosna i Hercegovina
<u>„Simulacija analitičkog rješenja za topografske talase primjenom bazena oblika rotacijskog paraboloida u okruženju Matlab”</u>
17:20 – 17:40
<b>Ivana Savković</b> , Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Republic of Srpska
<u>“On Carleson-type embeddings for weighted harmonic mixed norm spaces”</u>

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС  
10:00 – 16:20 САТИ, САЛА БИМ/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Бојана Милошевић

10:00 – 10:30
<b>Đorđe Stevanović</b> , Niš, Serbia <b>Ivan Damjanović</b> , University of Niš, Faculty of Electronics <b>Dragan Stevanović</b> , Mathematical Institute SANU
<u>“Approximating energy of wine glass cycles and paths”</u>
10:30 – 10:50
<b>Зорица Станимировић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Оливера Станчић</b> , Универзитет у Крагујевцу, Економски факултет
<u>„Проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са r-алокацијском шемом: математички модел и методе решавања”</u>
10:50 – 11:10
<b>Lenka Glavaš</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <b>Pavle Mladenović</b> , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Extreme values of moving averages and missing observations”</u>
11:10 – 11:30
<b>Весна Маринковић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Тијана Шукиловић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Филип Марић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Аутоматско решавање конструктивних проблема у апсолутној и хиперболичкој геометрији”</u>
11:30 – 11:50
<b>Александар Јовић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Услови оптималности у вишекритеријумским проблемима оптимизације са непрекидним временом”</u>
11:50 – 12:10
<b>Сандра Живановић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Александра Делић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Зорица Миловановић Јекнић</b> , Факултет за градитељски менаџмент, Универзитет Унион-Никола Тесла, Београд
<u>„Метода коначних разлика за линеарну вишечлану једначину субдифузије”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Сандра Живановић

12:30 – 12:50
<b>Марија Цупарић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Бојана Милошевић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Тестови сагласности са расподелом у случају непотпуног узорка”</u>
12:50 – 13:10
<b>Жикица Лукић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Бојана Милошевић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„О тестовима сагласности са Левијевом расподелом”</u>



13:10 – 13:30
<b>Мирјана Маљковић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Александар Вељковић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Ненад Митић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Саша Малков</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Владимир Брусић</b> , School of Computer Science, University of Nottingham, Ningbo, China
<u>„Класификација моноклеарних хелија периферне крви применом алгоритама машинског учења”</u>
13:30 – 13:50
<b>Ивана Милић Житник</b> , Астрономска опсерваторија, Београд
<u>„Функционална веза између резонанци три тела у средњем кретању и брзина Јарковског”</u>
13:50 – 14:10
<b>Филип Видојевић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Душан Цамић</b> , Универзитет у Београду, Факултет организационих наука <b>Мирослав Марић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Метода променљивих околина за фази кластеровање на комплексним мрежама оптимизацијом фази модуларности”</u>
14:10 – 14:30
<b>Rale Nikolić</b> , University of Defence, Military Academy <b>Nataša Ćirović</b> , University of Belgrade, School of Electrical Engineering <b>Jasmina Fijuljanin</b> , University of Defence, Military Academy
<u>“Some generalizations of Banach Contraction Principle”</u>

**ПАУЗА за кафу и освежење 14:30 – 15:00**

**Трећи део: 15:00 – 16:20**

**Председавајући: Марија Цупарић**

15:00 – 15:20
<b>Anica Kostić</b> , London School of Economics <b>Piotr Fryzlewicz</b> , London School of Economics
<u>“Change-point ideas in multiple testing: estimating the proportion of false null hypotheses”</u>
15:20 – 15:40
<b>Предраг Пилиповић</b> , Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Denmark
<u>„Оцењивање параметара у вишедимензионалним стохастичким дифузијама засновано на дискретизацијама дељења векторског поља”</u>
15:40 – 16:00
<b>Данијел Алексић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Бојана Милошевић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Утицај импутационих метода на тестове вишедимензионе нормалности”</u>
16:00 – 16:20
<b>Јована Томић</b> , Народна банка Србије
<u>„Хеуристички приступ решавању локацијског проблема ограничених капацитета са надметањем са делимичним задовољењем потражње”</u>

## II СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА У ОБРАЗОВАЊУ

10:00 – 17:20 САТИ, САЛА 706/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Мирослав Марић

10:00 – 11:00
<b>Мирјана Катић</b> , Математичка гимназија, Београд
<i><u>„Методе унапређивања знања математички надарених ученика основних школа из области геометрије”</u></i>
11:00 – 12:00
<b>Војислав Андрић</b> , Математички клуб „Диофант”, Ваљево
<i><u>„Настава математике између форме и суштине”</u></i>

Пауза за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Војислав Андрић

12:30 – 13:00
<b>Владимир Балтић</b> , Математичка гимназија, ВИШЕР
<i><u>„Комбинаторика - примене у настави математике у основној и средњој школи”</u></i>
13:00 – 13:30
<b>Мирослав Марић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет
<b>Ивана Ковачевић</b> , Универзитет у Београду, Филолошки факултет
<i><u>„Образовни софтвер – унапређивање оцењивања”</u></i>
13:30 – 14:00
<b>Радослав Божић</b> , Гимназија „Светозар Марковић”, Нови Сад
<i><u>„Примена динамичког софтвера Геогebra у обради вектора”</u></i>
14:00 – 14:30
<b>Елвир Чајић</b> , Електротехничка школа Тузла, Босна и Херцеговина
<b>Виолета Никодиновић</b> , Медицинска школа Стевица Јовановић, Панчево
<i><u>„Математичка анализа у Матлабу”</u></i>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:20

Председавајући: Радослав Божић

15:00 – 15:20
<b>Ивана Јововић</b> , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<b>Тамара Коледин</b> , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<i><u>„Утицај пандемије Covid-19 на просечан број бодова на пријемном испиту из математике на Електротехничком факултету у Београду”</u></i>

15:20 – 15:40
<b>Manuela Muzika Dizdarević</b> , Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu <b>Aleksandar Balašev-Samarski</b> , Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu <b>Selma Zeković</b> , Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
<u>„Procjena stepena razumijevanja geometrijskih pojmova primjenom van Hieleove teorije i comparative judgement metoda”</u>
15:40 – 16:00
<b>Александра Куч</b> , ОШ „Ђура Јакшић” Краљево
<u>„Од математике до информатике кроз интерактивну игру и развој алгоритамског мишљења”</u>
16:00 – 16:20
<b>Милан Живановић</b> , Академија Васпитачко-медицинских струковних студија, Крушевац
<u>„Вероватноћа Краљевске игре Ур”</u>
16:20 – 16:40
<b>Дејан Вурдеља</b> , Прва економска школа, Београд
<u>„Влашка магија и Каћуша. Анализа ИМО задатака”</u>
16:40 – 17:00
<b>Синиша Мозетић</b> , Шабачка гимназија <b>Милош Пушић</b> , Прва београдска гимназија
<u>„Неки учени проблеми у реализацији средњошколских тема: степеновање, кореновање и експоненцијална функција”</u>
17:00 – 17:20
<b>Nives Baranović</b> , Odsjek za učiteljski studij Filozofski fakultet u Splitu, Hrvatska <b>Branka Antunović-Piton</b> , Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilište Juraj Dobrila u Puli, Hrvatska
<u>„Razvoj vizualnog, algebarskog i funkcijskog mišljenja na primjeru rastućeg geometrijskog uzorka”</u>

### III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

12:30 – 15:40 САТИ, САЛА 704/IV

Први део: 12:30 – 14:30

Председавајући: **Кристина Мићић**, студент Математичког факултета Универзитета у Београду

12:30 – 12:50
<b>Петар Ђирковић</b> , Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет <b>Предраг Ђорђевић</b> , Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет <u>„Налажење графова са задатим спектром помоћу методе променљивих околина”</u>
12:50 – 13:10
<b>Лазар Васовић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Анализа и предвиђање тока епидемије COVID-19 у Републици Србији помоћу скривених Марковљевих модела”</u>
13:10 – 13:30
<b>Кристина Матовић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Перформансе модификованих верзија Калмановог филтера у праћењу покретног циља”</u>
13:30 – 13:50
<b>Милош Мићовић</b> , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет <b>Сара Лазић</b> , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет <u>„Јава апликација за нумеричку интеграцију”</u>
13:50 – 14:10
<b>Никола Убавић</b> , Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Дигитални репозиторијум испитних рокова”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:10 – 15:00

Други део: 15:00 – 15:40

Председавајући: **Кристина Матовић**, студент Математичког факултета Универзитета у Београду

15:00 – 15:20
<b>Винка Дакић</b> , <b>Марко Гроздановић</b> , <b>Лана Ивковић</b> , <b>Наталија Младеновић</b> , <b>Иван Петраш</b> , <b>Марко Радета</b> , <b>Срђан Ранђеловић</b> : Универзитет у Београду, Математички факултет <u>„Прецизно одређивање параметара планете WASP-60b из фотометријских посматрања”</u>
15:20 – 15:40
<b>Дебора Павела</b> , <b>Бојан Новаковић</b> , <b>Виктор Радовић</b> : Универзитет у Београду, Математички факултет <b>Valerio Caruba</b> , Универзитет у Сао Паулу, Бразил <u>„Карма фамилија астероида”</u>

## САДРЖАЈ

**Данијел Алексић, Бојана Милошевић**

Утицај импутационих метода на тестове вишедимензионе нормалности . . . . . 1

**Војислав Андрић**

Настава математике између форме и суштине . . . . . 1

**Miloš Arsenović**

Moduli of continuity of harmonic quasiconformal mappings - a overview . . . . . 2

**Miloš Arsenović, Miodrag Mateljević**

On Holder continuity of  $Q$ -homeomorphisms . . . . . 3

**Владимир Балтић**

Комбинаторика – примене у настави математике у основним и средњим школама . . . . . 4

**Nives Baranović, Branka Antunović – Piton**

Razvoj vizualnog, algebarskog i funkcijskog mišljenja na primjeru rastućeg geometrijskog uzorka . . . 5

**Војан Башић, Анна Сливковá**

On tessellations and the Heesch number in large dimensions . . . . . 6

**Радослав Божић**

Примена динамичког софтвера Геогейбра у обради вектора . . . . . 7

**Danijela Branković, Žarko Mijajlović**

Fridmanove jednačine kao dinamički sistem . . . . . 8

**Лазар Васовић**

Анализа и предвиђање тока епидемије COVID-19 у Републици Србији помоћу скривених Марковљевих модела . . . . . 8

**Andrei Vesnin**

Hyperbolic knots, right-angled Coxeter groups and ideal polyhedra . . . . . 9

**Филип Видојевић, Душан Џамић, Мирослав Марић**

Метода променљивих околина за фази кластеровање на комплексним мрежама оптимизацијом фази модулариности . . . . . 10

**Дејан Вурдеља**

Влашка магија и Каћуша. Анализа ИМО задатака . . . . . 11

**Jelena Gajić**

Estimates of distance and gradient for positive pluriharmonic functions in the unit polydisc in  $\mathbb{C}^n$  . . . . . 11

**Lenka Glavaš, Pavle Mladenović**

Extreme Values of Moving Averages and Missing Observations . . . . . 12

**Vinka Dakić, Marko Grozdanović, Lana Ivković, Natalija Mladenović, Ivan Petraš,**

**Marko Radeta, Srđan Randelović**

Precizno određivanje parametara planete WASP-60b iz fotometrijskih posmatranja . . . . . 13

**Danijela Damjanović**

Local rigidity for parabolic affine actions . . . . . 14

**Ivan Dimitrijević**

Cosmological Solutions of a Nonlocal Gravity Model . . . . . 14

**Oleksandr Dovhopiatyi, Evgeny Sevost'yanov**

On compactness of classes of solutions of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretics-set type . . . . . 15

<b>Luigi D’Onofrio</b>	
A sense preserving Sobolev homeomorphism with negative Jacobian almost everywhere.....	16
<b>Vladimir Dragović</b>	
Dynamics of extremal polynomials, Painleve VI equations and isoharmonic deformations .....	16
<b>Душан Дробњак, Игор Уљаревић</b>	
Егзотични симплектоморфизми и контактна дејства круга.....	17
<b>Горан Ђанковић, Драган Ђокић</b>	
Шести момент Dirichlet-ових $L$ -функција над рационалним функцијским пољима .....	18
<b>Милош Ђорић</b>	
Неке реалне хиперповрши близу Келерове многострукости $S^3 \times S^3$ .....	19
<b>Milan Živanović</b>	
Verovatnoća Kraljevske igre Ur .....	20
<b>Сандра Живановић, Александра Делић, Зорица Миловановић Јекнић</b>	
Метода коначних разлика за линеарну вишечлану једначину субдифузије .....	21
<b>Oleg Ivrii</b>	
Critical values of inner functions.....	22
<b>Nebojša Ikodinović</b>	
Internal logic of Probabilistic Systems.....	22
<b>Zoran Jasak, Elvir Čajić</b>	
Simulacija analitičkog rješenja za topografske talase primjenom bazena oblika rotacijskog paraboloida u okruženju Matlab .....	23
<b>Александар Јовић</b>	
Услови оптималности у вишекритеријумским проблемима оптимизације са непрекидним временом .....	24
<b>Ivana Jovović, Tamara Koledin</b>	
Uticaј pandemije Covid-19 na prosečan broj bodova na prijemnom ispitu iz matematike na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.....	24
<b>Danko Jocić</b>	
Arithmetic-geometric means and Young norm inequalities for accretive operators .....	25
<b>David Kalaj</b>	
Hölder continuity of qc harmonic mappings between smooth domains.....	26
<b>Мирјана Катић</b>	
Методe унапређивања знања математички надарених ученика основних школа из области геометрије.....	26
<b>Dragoljub J. Kečkić, Srđan Stefanović</b>	
Isolated points of Birkhoff-James orthograph in $C^*$ -algebras .....	27
<b>Miljan Knežević, Marek Svetlik</b>	
Distortion theorems and estimates of Schwarz-Pick type for harmonic quasiconformal mappings - Review of the results of the Seminar for Complex Analysis in Belgrade .....	28
<b>Anica Kostic, Piotr Fryzlewicz</b>	
Change-point ideas in multiple testing: estimating the proportion of false null hypotheses.....	29
<b>Александра Куч</b>	
Од математике до информатике кроз интерактивну игру и развој алгоритамског мишљења.....	30
<b>Adel Khalfallah, Vojana Purtić, Miodrag Mateljević</b>	

Schwarz-Pick Lemma for Harmonic and Hyperbolic Harmonic Functions . . . . .	31
<b>Žikica Lukić, Bojana Milošević</b>	
O testovima saglasnosti sa Leviјevom raspodelom . . . . .	32
<b>Mirjana Maljković, Aleksandar Veljković, Nenad Mitić, Saša Malkov, Vladimir Brusić</b>	
Klasifikacija mononuklearnih ćelija periferne krvi primenom algoritama mašinskog učenja . . . . .	33
<b>Vesna Marinković, Tijana Šukilović, Filip Marić</b>	
Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u apsolutnoj i hiperboličkoј geometriji . . . . .	34
<b>Mariјan Marković</b>	
Hardy–Littlewood theorems and the Bergman distance . . . . .	35
<b>Мирослав Марић, Ивана Ковачевић</b>	
Образовни софтвер – унапређивање оцењивања . . . . .	35
<b>Миодраг Матељевић, Никола Мутавџић</b>	
Шварцова лема на граници за хармонијска и плурихармонијска пресликавања и неке генерализације . . . . .	35
<b>Кристина Матовић</b>	
Перформансе модификованих верзија Калмановог филтера у праћењу покретног циља . . . . .	37
<b>Mariјa Mikić, Đorđe Krtinić</b>	
Cauchy problem for the Emden–Fowler equation with initial point on the positive part of $y$ -axis .	38
<b>Ivana Milić Žitnik</b>	
Funkcionalna veza između rezonanci tri tela u srednjem kretanju i brzina Jarkovskog . . . . .	39
<b>Милан Миликић</b>	
Примена GeoGebra софтвера приликом усвајања геометријских појмова у четвртој разреду основне школе . . . . .	40
<b>Miloš Mićović, Sara Lazić</b>	
Java aplikacija za numeričku integraciju . . . . .	41
<b>Siniša Mozetić, Miloš Pušić</b>	
Neki uočeni problemi u realizaciji srednjoškolskih tema: stepenovanje, korenovanje i eksponencijalna funkcija . . . . .	42
<b>Manuela Muzika Dizdarević, Aleksandar Balašev-Samarski, Selma Zeković</b>	
Procjena stepena razumijevanja geometrijskih pojmova primjenom van Hieleove teorije i comparative judgement metoda . . . . .	43
<b>Rale Nikolić, Nataša Ćirović, Jasmina Fijuljanin</b>	
Some generalizations of Banach Contraction Principle . . . . .	44
<b>Debora Pavela, Bojan Novaković, Viktor Radović, Valerio Carruba</b>	
Karma familija asteroida . . . . .	45
<b>Marko Pešović, Zoran S. Pucanović</b>	
A Note on the Generalized Narayana’s Cows Sequence . . . . .	46
<b>Predrag Pilipović</b>	
Ocenjivanje parametara u višedimenzionalnim stohastičkim difuzijama zasnovano na diskretizacijama deljenja vektorskog polja . . . . .	47
<b>Biljana Radić</b>	
O normama $k$ -cirkularnih matrica sa Fibonačijevim brojevima . . . . .	48
<b>Maja Roslavcev</b>	
Gröbner bases over commutative von Neumann regular rings . . . . .	48

<b>Ivana Savković</b> On Carleson-type embeddings for weighted harmonic mixed norm spaces . . . . .	49
<b>Andrea Seppi</b> Rigidity of minimal Lagrangian diffeomorphisms between spherical cone surfaces . . . . .	49
<b>Zorica Stanimirović, Olivera Stančić</b> Problem $p$ -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa $r$ -alokacijskom šemom: matematički model i metode rešavanja . . . . .	50
<b>Đorđe Stevanović, Ivan Damjanović, Dragan Stevanović</b> Approximating energy of wine glass cycles and paths . . . . .	51
<b>Jovana Tomić</b> Heuristički pristup rešavanju lokacijskog problema ograničenih kapaciteta sa nadmetanjem sa delimičnim zadovoljenjem potražnje . . . . .	52
<b>Petar Ćirković, Predrag Đorđević</b> Nalaženje grafova sa zadatim spektrom pomoću metode promenljivih okolina . . . . .	53
<b>Nikola Ubavić</b> Digitalni repozitorijum ispitnih rokova . . . . .	53
<b>Марија Цупарић, Бојана Милошевић</b> Тестови сагласности са расподелом у случају непотпуног узорка . . . . .	54
<b>Елвир Чајић, Виолета Николиновић</b> Математичка анализа у Матлабу . . . . .	55



## Утицај импутационих метода на тестове вишедимензионе нормалности

Данијел Алексић

Универзитет у Београду, Математички факултет  
e-mail: danijel\_aleksic@matf.bg.ac.rs

Бојана Милошевић

Универзитет у Београду, Математички факултет  
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Многе од статистичких процедура захтевају доступност комплетног узорка. Сходно томе, у литератури је до сада предложено много различитих импутационих метода којима се превазилази овај проблем. Међутим, импутационе методе могу имати значајан утицај на расподелу података ([1]). Због тога је потребно испитати какав је утицај импутационих метода на статистичке процедуре које значајно зависе управо од расподеле података. У овом раду размотрен је утицај импутационих на неке од тестова вишедимензионе нормалности предложених у [2]. Предложен је метод калибрације нивоа значајности за тестирање на подацима импутираним разним методама импутације, а тестирање у том случају показало се као моћније од просте ампутације.

**Кључне речи:** недостајући подаци; импутација; тестови нормалности; калибрација.

### Библиографија

- [1] M.S. Santos, J.P. Soares, P.H. Abreu, H.J. Araujo, J.A.M. Santos. Influence of Data Distribution in Missing Data Imputation. *Conference on Artificial Intelligence in Medicine in Europe*, 2017.
  - [2] B. Ebner, N. Henze. Tests for multivariate normality—a critical review with emphasis on weighted  $L^2$ -statistics. *Springer, TEST*29, 845-892 (2020).
- 

## Настава математике између форме и суштине

Војислав Андрић

Математички клуб „Диофант”, Ваљevo  
e-mail: voja.andric@gmail.com

**Апстракт.** Циљ овог саопштења је да укаже на последице формалног и репродуктивног приступа настави математике и недостатак суштинског прилаза настави математике који се заснива на развијању мисаоних и логичких функција ученика. Таква ситуација за последицу има функционалну математичку неписменост (али не и само математичку). Исказан став ће бити поткрепљен доказима садржаним у резултатима релевантних екстерних домаћих и страних истраживања. У саопштењу ће бити речи и о неким предлозима за превазилажење актуелног стања.

**Кључне речи:** Настава математике; Формални приступ; Репродуктивни приступ.

## Moduli of continuity of harmonic quasiconformal mappings - an overview

**Miloš Arsenović**

*Department of Mathematics,  
Belgrade Unoversity  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We give an overview of some older results in the theory of harmonic quasiconformal mappings, with emphasis on relationship between moduli of continuity of such mappings to the moduli of continuity of the corresponding restrictions to the boundary. We describe different approaches to the problem and comment on still unresolved problems in this field of research.

**Keywords:** quasiconformal maps, harmonic maps, Modulus of continuity.

### References

- [1] **Ali Abaob, Miloš Arsenović, Miodrag Mateljević, Abejela Skheam**, Moduli of continuity of harmonic quasiregular mappings on bounded domains. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 2013, 38, 839-847.
- [2] **O. Martio** On harmonic quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 1968, Ser A I 425, 3-10.
- [3] **V. Todorčević** Harmonic Quasiconformal Mappings and Hyperbolic Type Metrics, *Springer*, 2019.

## On Hölder continuity of $Q$ -homeomorphisms

**Miloš Arsenović**

*Department of Mathematics,  
Belgrade University  
e-mail: arsenovic@matf.bg.ac.rs*

**Miodrag Mateljević**

*Department of Mathematics  
Belgrade University  
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We prove Hölder continuity at the boundary of a homeomorphism  $f$  defined on a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  with Lipschitz boundary. The homeomorphism  $f$  is assumed to belong to certain Orlicz-Sobolev class and to satisfy a distortion condition near the boundary. We employ a method of straightening the boundary by means of Lipschitz continuous transformation of coordinates and a careful tracking of relevant quantitative properties of mappings under such transformation of coordinates. Our result generalizes previously obtained result for the unit ball by Mateljević, Salimov and Sevostyanov.

**Keywords:**  $Q$ -homeomorphisms, Orlicz-Sobolev spaces, Hölder continuity.

### References

- [1] **Luigi D’Onofrio, Stanislav Hencl, Jan Malý, Roberta Schiattarella**, Note on Lusin (N) condition and the distributional determinant. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 439, 171-182.
- [2] **Kovtonyuk, D., Ryazanov, V., Salimov, B., Sevostyanov, E.** Toward the theory of Orlicz-Sobolev classes, *St. Petersburg Math. J.*, 2014, 25:6, 929-963.
- [3] **Mateljević, M., Salimov R., Sevostyanov, E.** Hölder and Lipschitz Continuity of Mappings in Orlicz-Sobolev Classes with the Distortion of Bounded Mean Value Type and Harmonic Mappings, *preprint*, 2020

## Комбинаторика – примене у настави математике у основним и средњим школама

Владимир Балтић

*Математичка гимназија, ВИШЕР*

*e-mail: mtcac@gmail.com*

**Апстракт.** Често се мисли да је Комбинаторика област математике која се бави само пребројавањем. Овде ћемо дати детаљан преглед свих области којима се комбинаторика бави:

- пребрајањем скупова (тј. одређивањем броја елемената скупова);
- миспитивањем/доказивањем постојања (егзистенције) одређених комбинаторних структура;
- класификацијом комбинаторних структура;
- екстремалним проблемима (min, max);
- проблемима комбинаторне оптимизације и одговарајућим алгоритмима.

У предавању подсетићемо се на основне комбинаторне принципе. Све је илустровано са мноштвом разноврсних примера и показано је како је то коришћено у настави математике током короне. Скрећемо пажњу на наредну адресу, на којој је Вељко Ћировић оставио мноштво комбинаторних материјала, које наставници могу да искористе у раду:

<http://geogebra.matf.bg.ac.rs/#courses>

**Кључне речи:** Комбинаторика; комбинаторни принципи; екстремални проблеми.

### Библиографија

- [1] Д. Стевановић, В. Балтић, С. Симић, М. Ћирић. Дискретна математика – Основе комбинаторике и теорије графова *ДМС*, 2008.

## Razvoj vizualnog, algebarskog i funkcijskog mišljenja na primjeru rastućeg geometrijskog uzorka

**Nives Baranović**

*Odsjek za učiteljski studij Filozofski fakultet u Splitu  
e-mail: nives@ffst.hr*

**Branka Antunović – Piton**

*Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilište Juraj Dobrila u Puli  
e-mail: bpton@unipu.hr*

**Apstrakt.** Čovjek se, zbog bioloških karakteristika, od svog rođenja služi sposobnostima vizualizacije, koje postupno napušta kako bi prešao na apstraktno mišljenje, najprije kroz jezik, a zatim i kroz simbolički zapis. Kroz odgovarajuće problemske zadatka moguće je ispreplesti razvoj vizualnog mišljenja u svrhu napredovanja do općih formi te razvoj algebarskog mišljenja u svrhu napredovanja do simboličkog zapisa, još od primarnog obrazovanja.

Nadalje, koncept funkcije implicitno se provlači kroz sve razine matematičkog obrazovanja, a posebno se intenzivno koristi u srednjoškolskoj matematici kroz različite vrste funkcija. Njegovo razumijevanje preduvjet je razumijevanja mnogih drugih koncepata zbog čega se smatra temeljnim matematičkim konceptom. Iako je važan i učestalo se koristi, zbog svoje kompleksnosti učenici koncept funkcije rijetko u potpunosti razumiju i obično ga koriste na proceduralnoj razini pa nerijetko izostaje razvoj funkcijskog mišljenja.

Problemski zadaci s rastućim geometrijskim uzorcima na prirodan način osiguravaju okruženje za razvoj različitih oblika zaključivanja i različitih strategija određivanja općih formi istog pravila. Time se ciljano razvijaju i različiti oblici mišljenja: od vizualnog, preko algebarskog do funkcijskog mišljenja.

Stoga je cilj ovog rada ukazati na „skrivenne” potencijale odabranih problemskih zadataka u procesu učenja i poučavanja matematike, posebno u svrhu razvoja vizualnog i algebarskog mišljenja, boljeg razumijevanja koncepta funkcije i razvoja funkcijskog mišljenja. Na taj način, uspostavlja se i ravnoteža između proceduralnog i konceptualnog znanja te razvoj kreativnosti i divergentnog mišljenja. S obzirom da geometrijski uzorak svatko „vidi” na svoj način, dodatno se žele osvijestiti različite strategije rješavanja problema kao i različiti oblici zaključivanja, što će biti prikazano i na primjeru jednog istraživanja s učenicima srednjih gradskih škola.

**Ključne reči:** Ekvivalentni izrazi, koncept funkcije, generalizacija, vizualizacija, proces rješavanja problema.

## On tessellations and the Heesch number in large dimensions

**Bojan Bašić**

*Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad  
Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad, Serbia  
e-mail: bojan.basic@dmi.uns.ac.rs*

**Anna Slivková**

*Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad  
Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad, Serbia  
e-mail: anna.slivkova@dmi.uns.ac.rs*

**Abstract.** In the first part of the talk, there will be presented some basic notions on *tessellations* (or *tilings*), and the so-called *Heesch number* of a figure will be introduced, which measures, loosely speaking, how “far” we can advance toward a tiling of the whole space using the given figure (the greater Heesch number is, we can advance “further”; and the Heesch number is infinite if and only if the space can be tiled by congruent copies of the given figure). Probably the most important open problem concerning the Heesch number (called *Heesch’s problem*) asks whether the set of all finite values that can be the Heesch number of some figure is bounded from above (in other words, whether there exists the largest possible finite Heesch number). For almost full 20 years, the “record-holder” (in the Euclidean plane) had been a figure whose Heesch number is 5, until recently, when a figure whose Heesch number is 6 has been discovered.

In the second part of the talk, there will be presented a solution of the  $d$ -dimensional Heesch’s problem in the asymptotic sense. Namely, it will be shown that, if we let  $d \rightarrow \infty$ , then there is no uniform upper bound on the set of all possible finite Heesch numbers in the space  $\mathbb{E}^d$ ; in other words, given any nonnegative integer  $n$ , we can find a dimension  $d$  (depending on  $n$ ) in which there exists a hypersolid whose Heesch number is finite and greater than  $n$ .

**Keywords:** Heesch number; tessellation; tiling.

## Примена динамичког софтвера Геогebra у обради вектора

Радослав Божић

Гимназија "Светозар Марковић", Његошева 22, Нови Сад  
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com

**Апстракт.** Изучавање вектора у оквиру наставног предмета математика почиње у петом разреду основне школе. Ученици се тада упознају са појмом и основним особинама вектора, као и са појмом translације. Детаљније изучавање вектора се наставља током средњошколског образовања. Пракса је показала да ученици неретко имају потешкоћа у савладавању овог дела градива. Слично су показала и истраживања спроведена у овој области. Нарочито је изражен проблем повезивања алгебарске и графичке репрезентације вектора, са нагласком на векторском и мешовитом производу. Употреба динамичког софтвера, као што је Геогebra, омогућава да се вектори представљају и истовремено посматрају у оквиру алгебарске и графичке репрезентације. Рад у Геогebra 3Д окружењу омогућава квалитетну визуелизацију translације, као и операција сабирања, одузимања и множења вектора скаларом, али и векторског и мешовитог производа. Динамичка својства овог софтвера омогућавају да се анализира међусобна зависност алгебарске и графичке репрезентације вектора, те утицај промене одређених параметара на векторе у равни и у простору. Примена динамичког софтвера је погодна и код онлајн наставе. Досадашња искуства су показала да динамичка визуелизација може имати позитиван утицај на квалитет знања ученика у области вектора.

**Кључне речи:** Динамички софтвер Геогebra; Вектори; Тродимензионални приказ.

### Библиографија

- [1] **Appova, A., Berezovski, T.** Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations. In *S. Brown, G. Karakok, G. Hah Roh, M. Oehrtman (Eds.), Conference on research in undergraduate mathematics education: Crume xvi. Denver: RUME., 2013, 2, pp. 8 - 17.*
- [2] **Martin-Gonzalez, A., Chi-Poot, A., Uc-Cetina, V.** Usability evaluation of an augmented reality system for teaching Euclidean vectors. *Innovations in Education and Teaching International*, 2015, 53(6), 627 - 636.
- [3] **Widada, Wahyu, Herawaty, D., Andriyani, D. S., Marantika, R., Yanti, I. D.** The thinking process of students in understanding the concept of graphs during ethnomathematics learning. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1470*, 2020, 012072.

## Fridmanove jednačine kao dinamički sistem

**Danijela Branković**

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: danijela@etf.bg.ac.rs*

**Žarko Mijačlović**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: zarkom@matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** У овом раду представимо динамiku  $\Lambda$ CDM modela univerzuma pod pretpostavkom da se univerzum sastoji od savršenih barotropskih fluida koji nemaju međusobnu interakciju. Такође, биће приказана одговарајућа физичка интерпретација, као и нове зависности између космолошких параметара.

**Кључне речи:** Fridmanove jednačine;  $\Lambda$ CDM model; dinamički sistem.

---

## Анализа и предвиђање тока епидемије COVID-19 у Републици Србији помоћу скривених Марковљевих модела

**Лазар Васовић**

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд  
e-mail: pd212006@alas.matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** Скривени Марковљеви модели (НММ) јесу вероватносни модели са широком применом у анализи секвенцијалних података. Будући да су генеративни по природи, значајна им је улога у решавању проблема ненадгледаног машинског учења над временским серијама. У раду су формиран и упоређени различити НММ над серијама које представљају ток епидемије COVID-19 у Републици Србији, при чему су обухваћени најосновнији подаци – бројеви новозаражених, умрлих потврђених пацијената и активних случајева. Направљени модели успешно деле епидемију по фазама: на таласе, према активности вируса, према стабилности епидемијске криве, као и према другим сродним критеријумима. Добијени резултати могу се тумачити како уопштено, у контексту описа и предвиђања тока епидемије, тако и нешто конкретније, нпр. у контексту планирања противепидемијских мера.

**Кључне речи:** скривени Марковљеви модели (НММ); епидемија COVID-19; епидемиолошки модели; ненадгледано машинско учење.



## Hyperbolic knots, right-angled Coxeter groups and ideal polyhedra

Andrei Vesnin

*National Research Tomsk State University, Tomsk, 63450, Russia*  
*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia*  
*e-mail: vesnin@math.nsc.ru*

**Abstract.** We will discuss geometric structures on knot and link complements in sense of [1]. Following Champanenkar, Kofman and Purcell we say that a link  $L \subset S^3$  is said to be *right-angled* if a manifold  $S^3 \setminus L$  equipped with a hyperbolic structure can be decomposed into right-angled polyhedra. The well-known 2-component Whitehead link and the 3-component Borromean rings link are both examples of right-angled links. Their complements can be decomposed into one and two copies of an ideal right-angled octahedron, respectively.

The method from [2] admits to construct right-angled links corresponding to index four subgroups of groups, generated in faces of ideal (all vertices are ideal) right-angled (all dihedral angles are  $\frac{\pi}{2}$ ) hyperbolic polyhedra. As a corollary of the famous Andreev's theorem, an ideal right-angled polyhedron is determined by its 1-skeleton uniquely up to isometry.

We will discuss volumes of ideal right-angled hyperbolic polyhedra. There will be presented volume upper bounds depending of number of vertices [3]. Moreover will discuss how these studies of volumes are connected with some conjectures about hyperbolic knot and graph invariants.

**Keywords:** Lobachevsky space; knots and links; ideal polyhedra.

### References

- [1] **W. Thurston.** The geometry and topology of three-manifolds. Lecture notes, Princeton, 1980.
- [2] **A. Vesnin.** Right-angled polyhedra and hyperbolic 3-manifolds. *Russian Math. Surveys*, 2017, 72, 335-374.
- [3] **A. Egorov, A. Vesnin.** Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2020, 52, 565 - 576.

## Метода променљивих околина за фази кластеровање на комплексним мрежама оптимизацијом фази модуларности

Филип Видојевић

Математички факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: filip\_vidojevic@matf.bg.ac.rs

Душан Џамић

Факултет организационих наука, Универзитет у Београду  
e-mail: dzamic.dusan@fon.bg.ac.rs

Мирослав Марић

Математички факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Потреба за кластеровањем се јавља у различитим областима почев од анализе социјалних мрежа и идентификације заједница у њима па до анализе метаболичких мрежа и одређивања функције протеина. Проблем одређивања кластера у мрежи, при чему један чвор може делимично припадати већем броју кластера, назива се фази (преклапајуће) кластеровање на мрежи. У овом раду предложена је нова метода променљивих околина за фази кластеровање на мрежи. Метода оптимизује фази модуларност, најчешће коришћену меру за одређивање квалитета преклапајућих кластера. Локална претрага је имплементирана коришћењем алгорита брзе максимизације фази модуларности који итеративно побољшава текуће решење користећи формулу за максимално повећање фази модуларности у сваком кораку. У циљу даљег побољшања решења у фази размрдавања имплементирани су различите околине засноване на премештању чворова између кластера. За тестирање методе коришћене су Захаријев карате клуб и Амерички колеџ фудбал инстанце. Прелиминарни рачунарски експерименти показују да предложена метода превазилази локалне минимуме које алгоритам брзе максимизације врло брзо достигне.

**Кључне речи:** Фази кластеровање; Фази модуларност; Метода променљивих околина.

### Библиографија

- [1] **D. Džamić, J. Pei, M. Marić, N. Mladenović, P. Pardalos.** Exponential quality function for community detection in complex networks. *International Transactions in Operation Research*, 27, 03 2018.
- [2] **D. Džamić.** Nove metode klasterovanja na kompleksnim mrežama. *Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu*, 2021.
- [3] **T. Havens, J. Bezdek, C. Leckie, K. Ramamohanarao, M. Palaniswam.** A soft modularity function for detecting fuzzy communities in social networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21, 12 2013.
- [4] **A. Yazdanparast, T. Havens, M. Jamalabdollahi.** Soft overlapping community detection in large-scale networks via fast fuzzy modularity maximization. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP, 03 2020.

## Влашка магија и Каћуша. Анализа ИМО задатака

Дејан Вурдеља

Прва економска школа, Петљиња 5-7, Београд  
e-mail: [dvurdelja@sbb.rs](mailto:dvurdelja@sbb.rs)

**Апстракт.** Приказаћемо решење једног задатка са ИМО одржане у Румунији 1960. године и решење једног задатка са ИМО одржане у Бугарској 1966. године.

Текст задатка са ИМО одржане у Румунији гласи: Решити неједначину

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{2x + 1})^2} < 2x + 9.$$

Текст задатка са ИМО одржане у Бугарској гласи: На математичком такмичењу постављена су три проблема  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Двадесетпет учесника су решили бар по један проблем. Од свих који нису решили проблем  $A$ , они који су решили проблем  $B$  су дупло бројнији него они који су решили проблем  $C$ . Број учесника који су решили проблем  $A$  био је за један већи од броја учесника који су заједно са  $A$  решили бар још један проблем. Заједно са учесницима који су решили само један проблем, половина није решила задатак  $A$ . Колико њих је решило само задатак  $B$ ?

## Estimates of distance and gradient for positive pluriharmonic functions in the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$

Jelena Gajić

Faculty Of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka, Republic of Srpska  
e-mail: [jelena.gajic.mm@gmail.com](mailto:jelena.gajic.mm@gmail.com)

**Abstract.** We prove Schwarz-Pick lemma for strictly positive pluriharmonic functions in the open unit polydisc in  $\mathbb{C}^n$ . We give various estimates for positive pluriharmonic functions defined in  $\mathbb{D}^n$ . These estimates are in terms of natural metrics on  $\mathbb{D}^n$ . The method we employ was developed by M. Mateljević and his collaborators, (see [1].) In ([2]) the author gives an estimate of the distance for pluriharmonic functions from any complex manifold to a proper open interval of  $\mathbb{R}$ . We will give a direct proof for pluriharmonic functions in the unit polydisc. An estimate on the  $\mathcal{M}$ -invariant real gradient of bounded pluriharmonic functions in the unit ball in  $\mathbb{C}^n$  can be found in ([3].) All our estimates, both on distance and gradient are sharp. In the case of a gradient an extreme function is given.

**Keywords:** pluriharmonic functions; Kobayashi distance; Schwarz-Pick lemma

### References

- [1] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 2018, 464, 78–100.
- [2] **A. Khalfallah.** Old and new invariant pseudo-distances defined by pluriharmonic functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 2015, 9(1), 113–119.
- [3] **P. Melentjević.** Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack inequalities. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2018, 43, 391–399.

## Extreme Values of Moving Averages and Missing Observations

**Lenka Glavaš**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: lenka@matf.bg.ac.rs*

**Pavle Mladenović**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
e-mail: paja@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We investigate maxima in incomplete samples from the stationary random processes  $(X_n)_{n \geq 1}$ , that are given by  $X_n = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{n-i}$ , where  $Z_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , is a sequence of i.i.d. random variables with regularly varying balanced tails, i.e.  $P\{|Z_0| > t\} = t^{-\alpha} L(t)$ ,  $t > 0$ , for some  $\alpha > 0$  and a slowly varying function  $L$ , and  $P\{Z_0 > t\} \sim pP\{|Z_0| > t\}$ ,  $P\{Z_0 < -t\} \sim qP\{|Z_0| > t\}$ , as  $t \rightarrow \infty$ ,  $p + q = 1$ , where  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  is a sequence of real numbers satisfying the condition  $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i|^\alpha < \infty$ . The stochastic processes of the given type appear, for example, as stationary solutions of the stochastic difference equations that determines AR and ARMA processes. Heavy tailed distributions have been applied in different areas such as internet traffic, insurance and finance, hydrology, random graphs, population size, etc.

The observed and non-observed random variables in the process  $(X_n)_{n \geq 1}$  considered are determined by a deterministic 0–1 sequence  $(c_i)_{i \geq 1}$ . The class of limiting distributions of the random vector whose components are the maximum of the first  $n$  terms and the maximum of the observed random variables among the first  $n$  terms of the sequence  $(X_n)_{n \geq 1}$  is determined. The limiting distribution is considered as a function of the sequence  $(c_i)_{i \geq 1}$ . The proof requires a non-trivial combination of the point process theory and combinatorics.

**Keywords:** Extreme values; moving averages; heavy-tailed innovations; missing observations; point processes.

### References

- [1] **L. Glavaš, P. Mladenović.** Extreme values of linear processes with heavy-tailed innovations and missing observations. *Extremes*, 2020, **23**, 547 - 567.
- [2] **L. Glavaš, P. Mladenović, G. Samorodnitsky.** Extreme values of the uniform order 1 autoregressive processes and missing observations. *Extremes*, 2017, **20**, 671 - 690.
- [3] **P. Mladenović, V. Piterbarg.** On asymptotic distribution of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences. *Stochastic Processes and their Applications*, 2006, **116**, 1977 - 1991.

## Precizno određivanje parametara planete WASP-60b iz fotometrijskih posmatranja

**Vinka Dakić**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: dakicuma11@gmail.com*

**Marko Grozdanović**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: galaktika.m96@gmail.com*

**Lana Ivković**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: lannaivkovic@gmail.com*

**Natalija Mladenović**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: nm.mladenovic@gmail.com*

**Ivan Petraš**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: petras.ivan99@gmail.com*

**Marko Radeta**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: markoradeta@gmail.com*

**Srdan Randelović**

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija  
e-mail: srdjan99nbg@gmail.com*

**Apstrakt.** Jedan od osnovnih načina za detekciju ekstrasolarnih planeta i ispitivanje njihovih osobina je tranzit planete preko zvezdanog diska. Pri tranzitu dolazi do smanjenja sjaja zvezde, te se fotometrijskim snimanjem krive sjaja u različitim filterima i njihovom analizom mogu odrediti parametri sistema. U ovom radu ćemo prikazati istraživanja sistema zvezde WASP-60 i njene planete WASP-60b, koje su na predlog Društva astronoma Srbije, nazvane Vlasina i Morava od strane Međunarodne astronomske unije.

Tranzit planete WASP-60b je posmatran tri puta do sada. Prva dva posmatranja su vršena u Harris B filteru i dobijeni parametri su međusobno usklađeni, ali nijedno od ovih posmatranja nije vršeno tokom celog tranzita. Poslednje posmatranje je potpuno i vršeno je samo u Cousin I filteru, no dobijeni parametri značajno odstupaju od ranije određenih. Posmatranje u različitim filterima sa većim teleskopom omogućava da se dobije kvalitetnija kriva sjaja, te bi se njenom analizom mogli preciznije odrediti parametri zvezde WASP-60 i planete WASP-60b. U ovom izlaganju ćemo kratko predstaviti dosadašnja istraživanja sistema Morava-Vlasina, kao i naš naučnoistraživački projekat u okviru kojeg smo tokom tri posmatračke noći posmatrali navedeni sistem u I i B filterima, pomoću 1.4m-teleskopa Milanković na Astronomskoj stanici Vidojevica. Takođe, prikazaćemo prve rezultate i dalje planove za analizu podataka.

**Ključne reči:** ekstrasolarne planete; tranzit; fotometrija.

### Bibliografija

- [1] **Hebrard G., Collier Cameron A., Brown D. J. A., et al.** WASP-52b, WASP-58b, WASP-59b, and WASP-60b: Four new transiting close-in giant planets. *Astronomy and Astrophysics*, 2013.
  - [2] **Mancini L., Esposito M., Covino E., et al.** The GAPS programme with HARPS-N at TNG. XVI. Measurement of the Rossiter–McLaughlin effect of transiting planetary systems HAT-P-3, HAT-P-12, HAT-P-22, WASP-39, and WASP-60. *Astronomy and Astrophysics*, 2018.
  - [3] **Turner J.D., Leiter R.M., Biddle L.I., et al.** Investigating the physical properties of transiting hot Jupiters with the 1.5-m Kuiper Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017.
  - [4] **Salisbury M.A., Kolb U.C., Norton A.J., et al.** Monitoring of transiting exoplanets and their host stars with small aperture telescopes. *School of Physical Sciences, The Open University, Milton Keynes*, 2021.
- 

## Local rigidity for parabolic affine actions

**Danijela Damjanović**

*Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden*  
*e-mail: ddam@kth.se*

**Abstract.** I will describe the new result which provides local smooth classification for large classes of parabolic affine abelian actions on the torus. It is in the spirit of the classical Moser’s result for Diophantine circle translations. Unlike Moser’s KAM result (which has its version for commuting circle diffeomorphisms) here we have a dichotomy: either the action is locally rigid under certain Diophantine conditions, or the action has a rank one factor. So smooth classification of perturbations for parabolic affine actions is genuinely a higher-rank phenomenon. This is joint work with Bassam Fayad and Maria Saprykina.

---

## Cosmological Solutions of a Nonlocal Gravity Model

**Ivan Dimitrijevic**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics,*  
*Studentski Trg 16, 11000 Belgrade, Serbia*  
*e-mail: ivand@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** A nonlocal gravity model

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda + (R - 4\Lambda)\mathcal{F}(\square)(R - 4\Lambda))\sqrt{-g}d^4x$$

is introduced, and several exact cosmological solutions are presented. The first solution mimics properties similar to an interference between the radiation and the dark energy, while the second one is a nonsingular time symmetric bounce. Moreover, we investigate other possible exact cosmological solutions and find some in nonflat space. Used nonlocal gravity dynamics can change background topology. To solve the corresponding equations of motion, we first look for a solution of the eigenvalue problem  $\square(R - 4\Lambda) = q(R - 4\Lambda)$ .

This talk is based on joint work with B.Dragovich, Z.Rakic and J.Stankovic.

**Keywords:** nonlocal gravity; cosmological solutions; cosmological constant; dark energy.

## On compactness of classes of solutions of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretic-set type

**Oleksandr Dovhopiatyi**

*Zhytomyr Ivan Franko State University  
e-mail: Alexdov111111@gmail.com*

**Evgeny Sevost'yanov**

*Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Slavyansk  
e-mail: eseostyanov2009@gmail.com*

**Abstract.** Consider the following Cauchy problem:

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \quad (1)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \operatorname{Re} f(\zeta) = \varphi(z) \quad \forall z \in \partial D, \quad (2)$$

where  $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  is a predefined continuous function. In what follows, we assume that  $D$  is some Jordan domain in  $\mathbb{C}$ .

Let  $D$  be a domain in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , and let  $\Omega_n$  be a volume of the unit ball in  $\mathbb{R}^n$ . We say that a function  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  has a *finite mean oscillation* at a point  $x_0 \in D$ , write  $\psi \in FMO(x_0)$ , if

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\psi(x) - \bar{\psi}_\varepsilon| dm(x) < \infty, \quad (3)$$

where

$$\bar{\psi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \psi(x) dm(x).$$

Let  $M(z) \subset \mathbb{D}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  be some system of sets (that is, for each  $z_0 \in \mathbb{C}$  the symbol  $M(z_0)$  denotes some set in  $\mathbb{D}$ ). Denote by  $\mathfrak{M}_M$  the set of all complex measurable functions  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ , such that  $\mu(z) \in M(z)$  for almost all  $z \in \mathbb{C}$ .

We fix a point  $z_0 \in D$  and a function  $\varphi$ . Let  $M(z) \subset \mathbb{D}$ ,  $z \in D$ , be some system of sets. Let  $\mathfrak{F}_{\varphi, M, z_0}(D)$  be the class of all regular solutions  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  of the Dirichlet problem (1)–(2), which satisfy the condition  $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$  such that  $\mu \in \mathfrak{M}_M$ . We define a function  $Q_M(z)$  by the relation

$$Q_M(z) = \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)}, \quad q_M(z) = \sup_{\nu \in M(z)} |\nu|, \quad (4)$$

and we consider that  $Q_M(z) \equiv 1$  for  $z \in \mathbb{C} \setminus D$ .

**Theorem.** Let  $D$  be a simply connected domain in  $\mathbb{C}$ , and let  $\varphi$  be a continuous function in (2). Let  $M(z)$ ,  $z \in D$ , be a family of convex compact sets, and let  $Q_M$  be integrable in  $D$  and satisfies at least one of the following conditions: either  $Q_M \in FMO(\bar{D})$ , or

$$\int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t q_{M_{x_0}}(t)} = \infty \quad (5)$$

for any  $x_0 \in \overline{D}$  and some  $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$ , where  $q_{M_{x_0}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_M(x_0 + te^{i\theta}) d\theta$ . Then the family  $\mathfrak{F}_{\varphi, M, z_0}(D)$  is compact in  $D$ .

**Keywords:** Quasiconformal mappings, Dirichlet problem, Beltrami equation.

---

## A sense preserving Sobolev homeomorphism with negative Jacobian almost everywhere

**Luigi D’Onofrio**

*University of Napoli Parthenope*  
*e-mail: luigi.donofrio@uniparthenope.it*

**Abstract.** For every  $1 \leq p < \frac{3}{2}$  we construct a Sobolev homeomorphism  $f \in W^{1,p}([-1, 1]^4, [-1, 1]^4)$  such that  $f(x) = x$  for every  $x \in \partial[-1, 1]^4$  but  $J_f < 0$  a.e.. This is a joint work with D.C. Campbell and S. Hencl.

**Keywords:** Mappings of finite distortion; Sobolev homeomorphism; Degree theory

---

## Dynamics of extremal polynomials, Painleve VI equations and isoharmonic deformations

**Vladimir Dragović**

*University of Texas at Dallas, USA*  
*e-mail: vladad@turing.mi.sanu.ac.rs*

**Abstract.** The talk is based on interrelations between integrable billiards, extremal polynomials, Riemann surfaces, potential theory, and isomonodromic deformations. We discuss injectivity properties of rotation and winding numbers. We study dynamics of Chebyshev polynomials on several intervals and introduce a notion of isoharmonic deformations. We study their isomonodromic properties and formulate a new class of constrained Schlesinger systems. We provide explicit solutions to these systems. The talk is based on joint results with Vasilisa Shramchenko, including work in progress.



## Егзотични симплектоморфизми и контактна дејства круга

Душан Дробњак

*Универзитет у Београду*

*Математички факултет*

*Студентски трг 16, 11158 Београд*

*e-mail: dusan\_drobnjak@matf.bg.ac.rs*

Игор Уљаревић

*Универзитет у Београду*

*Математички факултет*

*Студентски трг 16, 11158 Београд*

*e-mail: igoru@ematf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** Егзотични симплектоморфизми су симплектоморфизми који нису изотопни идентичном песликавању кроз симплектоморфизме са компактним носачем. За разлику од њихових аналога у глаткој категорији (егзотичних дифеоморфизама) врло мало се зна о егзотичним симплектоморфизмима стандардне симплектичке лопте  $\mathbb{B}^{2n}$  у вишим димензијама. На пример, није познато да ли егзотични симплектоморфизми уопште постоје на  $\mathbb{B}^{2n}$  за  $n \geq 3$ . Дакле, није познато ни да ли постоји егзотични дифеоморфизам лопте димензије бар 6 који се може реализовати као симплектоморфизам.

Користећи методе Флорове теорије доказаћемо да непостојање егзотичних симплектоморфизама на стандардној симплектичкој лопти  $\mathbb{B}^{2n}$  имплицира прилично строгу тополошку рестрикцију на слободним контактним дејствима круга стандардне контактне сфере  $S^{2n-1}$ . Доказаћемо такође и аналогно тврђење за Лиувилев домен и контактна дејства круга на његовој граници.

**Кључне речи:** егзотични симплектоморфизми; контактна дејства; група класа симплектичких песликавања

## Шести момент Dirichlet-ових $L$ -функција над рационалним функцијским пољима

Горан Ђанковић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија  
e-mail: djankovic@matf.bg.ac.rs

Драган Ђокић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија  
e-mail: dragan@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Расподела простих бројева је директно условљена расподелом нула, а посредно и расподелом величине Dirichlet-ових  $L$ -функција на критичној линији  $\Re(s) = 1/2$ . Зато је проучавање момената ових функција, тј. њихових средњих вредности у неким добро дефинисаним фамилијама један од кључних циљева аналитичке теорије бројева. Са друге стране, помоћу *теорије случајних матрица* (која је оригинално развијена за потребе физике) су тек у последњој деценији XX века изведене хипотезе за асимптотику момената  $L$ -функција у различитим фамилијама, када тзв. *кондуктор*  $L$ -функције расте.

На овом предавању ћемо размотрити аналогна питања над рационалним функцијским пољима  $\mathbb{F}_q(t)$ , где је  $\mathbb{F}_q$  коначно поље. Биће представљена асимптотска формула за шести момент Dirichlet-ових  $L$ -функција над функцијским пољима облика

$$\sum_{\substack{Q \text{ моничан} \\ \deg Q = \mathbf{d}}} \sum_{\substack{\chi \pmod{Q} \\ \chi \text{ непаран} \\ \text{примитивни}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^6 \frac{dt}{2\pi/\log q} \asymp \mathbf{d}^9 q^{2\mathbf{d}},$$

кад степен полинома  $\mathbf{d} \rightarrow \infty$ . Ове  $L$ -функције су  $\frac{2\pi i}{\log q}$ -периодичне, па се горња интеграција може видети као интеграција по критичном кругу који је аналог критичне линије, док је сумација по моничним полиномним модулима  $Q$  и њиховим примитивним карактерима аналог Bombieri-Виноградов сумације за Dirichlet-ове  $L$ -функције над пољем  $\mathbb{Q}$ .

Добијени резултат је сагласан са хипотезама из теорије случајних матрица и представља аналог над функцијским пољима резултата [1] над пољем  $\mathbb{Q}$ , при чему је оцена за грешку у асимптотској формули у случају функцијских поља оштрија него над  $\mathbb{Q}$ .

**Кључне речи:** Dirichlet-ови карактери и  $L$ -функције; Теорија случајних матрица; Функцијско поље; Моменти  $L$ -функција; Hayes-ови карактери и  $L$ -функције.

### Библиографија

- [1] J. B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan. The sixth power moment of Dirichlet  $L$ -functions. *Geometric and Functional Analysis*, 2012, 22, 1257 - 1288.
- [2] G. Djanković, D. Đokić. The sixth power moment of Dirichlet  $L$ -functions over rational function fields. Preprint.

## Неке реалне хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

Милош Ђорић

Математички факултет  
e-mail: milosdj@matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Близу Келерове многострукости представљају класу скоро хермитских многострукости чији је коваријантни извод  $G = \nabla J$  скоро комплексне структуре кососиметрично векторско поље, па као такве представљају уопштење Келерових многострукости. Свака близу Келерова многострукост у димензији 2 и 4 је Келерова, па први примери строго близу Келерових многострукости постоје тек у димензији 6. Постоје само четири шестодимензионе хомогене близу Келерове многострукости:  $\mathbb{S}^6$ ,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{C}P^3$ ,  $F_{1,2}(\mathbb{C}^3)$ , при чему су последње три многострукости снабдевене метрикама које нису стандардне. О многострукости  $\mathbb{S}^6$  и њеним подмногострукостима постоји мноштво литературе, док се последњих година активно изучава и производ сфера  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ , са својом близу Келеровом структуром. Поред скоро комплексне структуре  $J$ , ова многострукост поседује и скоро продукт структуру  $P$ , која антикомутира са скоро комплексном структуром. Такође, на овој многострукости постоје две интересантне класе векторских поља, тзв.  $\mathcal{P}$ -сингуларна векторска поља, дефинисана по угледу на слична векторска поља на комплексној квадрици  $Q^n$ . Ова векторска поља  $X$  могу бити  $\mathcal{P}$ -изотропна или  $\mathcal{P}$ -главна, у зависности од димензије дистрибуције  $\mathcal{D} = \text{span}\{X, JX, PX, JPX\}$ . Уколико за јединично нормално векторско поље хиперповрши наметнемо услов да је  $\mathcal{P}$ -сингуларно, добијамо делимичну или потпуну класификацију таквих хиперповрши од  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ .

**Кључне речи:** близу Келерова многострукост, хиперповрш,  $\mathcal{P}$ -сингуларно векторско поље, скоро комплексна структура, скоро продукт структура

### Библиографија

- [1] **M. Djorić, M. Djorić, M. Moruz.** Real hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  with  $\mathcal{P}$ -isotropic normal, *Journal of Geometry and Physics* 160, 2021
- [2] **M. Djorić.** Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  whose normal vector field is  $\mathcal{P}$ -principal, *Mediterranean Journal of Mathematics* 18, 251, 2021
- [3] **Z. Hu, Z. Yao.** On Hopf hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ , *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 199, 2020, 1147–1170

## Verovatnoća Kraljevske igre Ur

Milan Živanović

*Akademija Vaspitačko-medicinskih strukovnih studija, Kruševac*  
*e-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs*

**Apstrakt.** Kurs verovatnoće i statistike se izučava na kraju srednjoškolskog matematičkog obrazovanja. Zbog preokupiranosti predstojećim završnim ispitom i pripremanja za prijemne ispite učenici sa manje entuzijazma pristupe izučavanju ovih sadržaja. Stoga je pred profesorima ozbiljan problem da podignu motivaciju učenika za učenje. To se uobičajeno postiže kroz aktuelne primere iz realnog života i korelacijom sa drugim nastavnim, ali i vannastavnim oblastima. Kako je teorija verovatnoće nastala iz praktičnih problema hazarderskih igara analiziranje problema vezanih za igre uopšte može značajno zainteresovati učenike. Kroz predstavljanje zanimljivih igara starih civilizacija moguće je uspostaviti korelaciju sa istorijom što može podstaći učenike na dodatna istraživanja. U ovom radu će biti opisana *Kraljevska igra Ur*, najstarija igra na tabli. Prezentovaćemo u GeoGebri modelovanu verziju ove igre sa web adrese <https://www.geogebra.org/m/aksgudv7>. U matematičkom delu rada će biti rešeni neki problemi teorije verovatnoće vezani za *Kraljevsku igru Ur*.

**Ključne reči:** Verovatnoća; Igra; GeoGebra

### Bibliografija

- [1] **F. Irvin.** On the Royal Game of Ur. *British Museum Press*, London, 2007, 16 - 32.
- [2] **J. Kečkić.** Matematika sa zbirkom zadataka za 4. razred gimnazije. *Zavod za udžbenike*, Beograd, 2016.

## Метода коначних разлика за линеарну вишечлану једначину субдифузије

Сандра Живановић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд  
e-mail: sandra@matf.bg.ac.rs

Александра Делић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, 11000 Београд  
e-mail: adelic@matf.bg.ac.rs

Зорица Миловановић Јекнић

Факултет за грађитељски менаџмент, Универзитет Унион-Никола Тесла, Цара Душана 62-64, 11000 Београд  
e-mail: zmilovanovic@unionnikolatesla.edu.rs

**Апстракт.** Једначина субдифузије настаје из класичне дифузионе једначине заменом првог извода по временској променљивој изводом разломљеног реда  $\alpha$ , где је  $\alpha \in (0, 1)$ . Из теорије фракционог рачуна издвојили смо дефиниције Риман-Лиувиловог и Капутовог извода разломљеног реда и њихове основне особине. Овде смо размотрили линеарну вишечлану једначину субдифузије са коефицијентом који садржи сингуларну Диракову дистрибуцију. Поставили смо почетно-гранични проблем за овакву једначину који се често у литератури означава као проблем са интерфејсом. Представљена је слаба формулација проблема који има слабо решење у простору Собољева одговарајућег типа. Дати су функционални простори који су од интереса за посматрани задатак, посебно простори функција са изводима разломљеног реда. Извршена је дискретизација задатка и уведени аналогни простори дискретних функција. Имплицитна диференцијска схема, заснована на методи коначних разлика је стабилна и дата је оцена брзине конвергенције. Нумеричким примером су показани добијени теоријски резултати.

**Кључне речи:** изводи разломљеног реда; слабо решење; диференцијска схема; стабилност; конвергенција.

### Библиографија

- [1] A. Delić, S. Živanović, Z. Milovanović Jeknić. A finite-difference scheme for a linear multi-term fractional-time differential equation with concentrated capacities. *International journal of numerical analysis and modeling*, 2021, 18, 265 - 286.

## Critical values of inner functions

Oleg Ivrii

*Tel Aviv University, Israel*  
*e-mail: ivrii@tauex.tau.ac.il*

**Abstract.** An inner function is a holomorphic self-map of the unit disk such that for almost every  $\theta \in [0, 2\pi)$ , the radial limit  $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta})$  exists and has absolute value 1. Inner functions have traditionally been studied in terms of their zeros. This approach leads to Beurling's invariant subspace theorem, which is one of the cornerstones of modern function theory. One can also study inner functions in terms of their critical points. In this talk, we will take a third route and study inner functions from the perspective of their critical values.

---

## Internal logic of Probabilistic Systems

Nebojša Ikodinović

*Faculty of Mathematics, Belgrade*  
*e-mail: ikodinovic@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** Probabilistic (modal) propositional logics (LPP) provide an internal, local perspective on probability systems, such as Markov processes, Harsanyi spaces (game theory), Aumann spaces (economics), Coalgebras over measurable spaces, Transition systems, Bayesian nets (artificial intelligence) etc. Rather than standing outside a probability system, LPP formulas are evaluated inside the system, and consequently, LPP languages offer a natural framework for describing 'dynamic' aspects of the corresponding random processes. The main difficulties associated with development of a strongly complete axiomatization come from non-compactness of semantical consequences, as well as from an infinitary nature of  $\sigma$ -additivity. We shall outline some key steps in developing a very general infinitary probabilistic propositional logic  $LPP_{\mathcal{A}}$ , where  $\mathcal{A}$  is a countable transitive set, mostly an admissible set. The primary emphasis will be on combining logical methods to construct weak models, and (nonstandard) measure-theoretic techniques to obtain strong models from weak ones.

**Keywords:** Probability logic; Markov process.

## References

- [1] N. Ikodinović, Z. Ognjanović, A. Perović, M. Rašković. Completeness theorems for  $\sigma$ -additive probabilistic semantics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2019, 171 (4), 102755, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.102755>.
- [2] N. Ikodinović. Some Notes on Finite and Hyperfinite model theory. In: Z. Šikić, A. Scedrov, S. Ghilezan, Z. Ognjanović, T. Studer (eds.), *Logic and Applications - LAP, Dubrovnik, Croatia*, 2016

## Simulacija analitičkog rješenja za topografske talase primjenom bazena oblika rotacijskog paraboloida u okruženju Matlab

**Zoran Jasak**

*FINRA Tuzla Mitra Trifunovica Uce br2 75000 Tuzla  
e-mail: jasak.z@bih.net.ba*

**Elvir Čajić**

*Finra Tuzla-Elektrotehnicka skola Tuzla , Mitra Trifunovica Uce br2 75000 Tuzla  
e-mail: ecajic86@gmail.com*

**Apstrakt.** Rad predstavlja simulaciju analitičkog rješenja za topografske talase uz generisanje bazena oblika rotacijskog paraboloida. Podešeni parametri se nalaze u koordinatnom sistemu radijalno i ugaono. Za primjer parametara topografskog položaja uzet je južni Jadran. Iscrtani su topografija bazena, disperzivna funkcija, crtanje u vremenu strujne funkcije transporta, za određeni mod. Određen je broj čvornih dijametara te broj čvornih kružnica. Od fizičkih parametara prikaza bazena definisani su poluprečnik bazena u kilometrima, Coriolisov parametar, prostorni korak radijalni i ugaoni te prostorna mreža, nakon čega je iscrtana topografija bazena. Odabir moda za slikovni prikaz topografskog talasa izvršen je prema sumi Gausovog hipergeometrijskog reda te je prikazana radijalna zavisnost, kružna frekvencija, period, vremenski korak, vremenska petlja, ugaona i vremenska zavisnost te kao rezultat tih parametara iscrtana je izolinija strujne funkcije.

**Ključne reči:** Simulacija, topografski talasi, rotacijski paraboloid, Matlab.

### Bibliografija

- [1] **R. Vuadalić, Z. Jasak.** ; Matematika 3 za inženjere. *Univerzitetska literatura Univerzitet u Tuzli - Masinski i elektrotehnički fakultet Tuzla*, 2010, 36, 49-74.
- [2] **E. Čajić, Z. Stojanović** Rjesavanje talasnih jednačina primjenom softvera Matlab. *Simpozijum matematika i primene Beograd PMF Beograd*, 2019.
- [3] **Robin O. Cleveland, PhD, James A. McAteer, PhD** The Physics of Shock Wave Lithotripsy", *Boston University's College of Engineering.*, 2011.

## Услови оптималности у вишекритеријумским проблемима оптимизације са непрекидним временом

Александар Јовић

Математички факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: [ajovic@matf.bg.ac.rs](mailto:ajovic@matf.bg.ac.rs)

**Апстракт.** Разматран је добро познат проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом са ограничењима типа неједнакости. Добијени су нови услови оптималности уз додатне претпоставке регуларности ограничења.

**Кључне речи:** Проблеми оптимизације са непрекидним временом; Услови оптималности; Дуалност.

### Библиографија

- [1] A. Jović, B. Marinković New optimality criteria for convex continuous-time problems of vector optimization. *Optimization*, 2021, 1 - 16.
  - [2] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, B. Marinković. Theorems of the alternative for systems of convex inequalities. *Set-Valued and Variational Analysis*, 27: 51–70, 2019.
- 

## Утицај пандемије Covid-19 на просечан број бодова на пријемном испиту из математике на Електротехничком факултету у Београду

Ivana Jovović

Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар краља Александра 73, 11 000 Београд  
e-mail: [ivana@etf.rs](mailto:ivana@etf.rs)

Tamara Koledin

Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар краља Александра 73, 11 000 Београд  
e-mail: [tamara@etf.rs](mailto:tamara@etf.rs)

**Апстракт.** У овом раду биће дат преглед статистике пријемних испита и пробних пријемних испита из математике на Електротехничком факултету у Београду у прошле три године. Биће разматран евентуалан утицај пандемије проузроковане вирусом Covid-19 на просечан број бодова који су кандидати освојили на пријемном испиту и пробном пријемном испиту из математике 2021. године. Обрађиваћемо пажњу на задатке које су кандидати урадили у мањем проценту од очекиваног. Пробаћемо да одговоримо на питање, у ком проценту су ти задаци из области које се обрађују и уче у трећем и четвртном разреду средње школе, тј. из периода обухваћеног пандемијом Covid-19 вируса. Отворићемо дискусију и разменити искуства са колегама из средњих стручних школа и гимназија.

**Кључне речи:** Covid-19; пријемни испит; број бодова освојен на пријемном испиту.



## Arithmetic-geometric means and Young norm inequalities for accretive operators

**Danko R. Jocić**

*University of Belgrade, Department of Mathematics, Studentski trg 16, P.O. box 550, 11000 Belgrade, Serbia  
e-mail: jocić@matf.bg.ac.rs*

### Abstract.

If  $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  are normal accretive operators,  $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ,  $0 < \alpha < 1$  and  $\Phi$  is a s.n. function, we proved that

$$\begin{aligned} |(A^* + A)^{1-\alpha} X(B + B^*)^\alpha|^2 &\leq \Gamma(2 - 2\alpha) \int_{[0, +\infty)} e^{-tB^*} (B^* + B)^\alpha |AX + XB|^2 (B^* + B)^\alpha e^{-tB} t^{2\alpha-1} dt, \\ \|(A^* + A)^{1-\alpha} X(B + B^*)^\alpha\|_\Phi &\leq \Gamma(2 - 2\alpha) \Gamma(2\alpha) \|AX + XB\|_\Phi, \quad \text{if } AX + XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Let  $A, B, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ,  $A \geq 0, B \geq 0, \eta, \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1)$  and  $\Phi$  be a s.n. function. If  $e^{i\eta}AX + e^{i\theta}XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ , then we have the following generalization of Young's norm inequality in [1, cor. 4.1]

$$|e^{i\eta} + e^{i\theta}| \|A^{1-\alpha}XB^\alpha\|_\Phi \leq \sqrt{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(2\alpha)} \|e^{i\eta}AX + e^{i\theta}XB\|_\Phi.$$

If  $p > 1$  and  $p' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{p-1}$ , then for all normal accretive operators  $A$  and  $B$ , such that  $AX + XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ,

$$\|(A^* + A)^{1/p}X(B + B^*)^{1/p'}\|_\Phi \leq \sqrt[p]{p} \sqrt[p']{p'} \sqrt{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(2\alpha)} \left\| \frac{A}{p}X + X\frac{B}{p'} \right\|_\Phi. \quad (6)$$

If  $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ,  $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$  a sequence in  $(0, 1)$ ,  $(t_n)_{n=1}^\infty$  is a summable sequence in  $(0, +\infty)$ ,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \prod_{n=1}^\infty (1 + t_n z)$  and let each of the absolutely summable (in  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ) families  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  and  $\{B_n\}_{n=1}^\infty$  consists of normal, accretive and mutually commuting operators. Then

$$\|X\|_\Phi \leq \left\| \left( \prod_{n=1}^\infty (I + A_n^* + A_n) \right)^{1/2} X \left( \prod_{n=1}^\infty (I + B_n + B_n^*) \right)^{1/2} \right\|_\Phi \leq \left\| \prod_{n=1}^\infty (I \otimes I + A_n \otimes I + I \otimes B_n) X \right\|_\Phi.$$

Specially, if  $A$  and  $B$  are normal, accretive operators, then

$$\|X\|_\Phi \leq \|\sqrt{f(A^* + A)}X\sqrt{f(B + B^*)}\|_\Phi \leq \|f(A \otimes I + I \otimes B)X\|_\Phi \leq \|\sqrt{f(I + A^*A)}X\sqrt{f(I + BB^*)}\|_\Phi.$$

If  $\Phi^{(p)*}$  is a dual s.n. function to  $\Phi^{(p)}$ ,  $M, N \in \mathbb{N}$  are such that  $(M + N)/2 \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ,  $A$  is  $M$ -hyper-accretive,  $B^*$  is  $N$ -hyper-accretive and at least one of  $A$  or  $B$  is normal, then for all  $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\left\| \left( \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} A^{*m} A^{M-m} \right)^{\frac{1}{2}} X \left( \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} B^{N-n} B^{*n} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)*}} \leq \frac{\sqrt{(M-1)!(N-1)!}}{\left(\frac{M+N}{2}-1\right)!} \left\| \sum_{k=0}^{(M+N)/2} \binom{(M+N)/2}{k} A^{\frac{M+N}{2}-k} X B^k \right\|_{\Phi^{(p)*}}.$$

### References

- [1] **D.R. Jocić**, Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak\*-integrals of operator valued functions, *J. Funct. Anal.*, 2005, 218, 318–346.
- [2] **D.R. Jocić, Đ. Krstinić, M. Lazarević**, Extensions of the arithmetic-geometric means and Young's norm inequalities to accretive operators, with applications, *Linear Multilinear Algebra*, 41 pages, published online 20 Mar 2021, <https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1900049>

## Hölder continuity of qc harmonic mappings between smooth domains

David Kalaj

Faculty of Natural Sciences and Mathematics University of Montenegro, Džordža Vašingtona b.b. Podgorica, Montenegro  
e-mail: davidk@ac.me

**Abstract.** We prove the following result. If  $f$  is a harmonic quasiconformal mapping between two Jordan domains  $D$  and  $\Omega$  having  $C^1$  boundaries, then the function  $f$  is globally Hölder continuous for every  $\alpha < 1$  but it is not Lipschitz in general. This extends and improves a classical theorem of S. Warschawski for conformal mappings.

**Keywords:** Norm inequalities,  $Q$  and  $Q^*$ -norms; accretive operators;

---

## Методе унапређивања знања математички надарених ученика основних школа из области геометрије

Мирјана Катић

Математичка гимназија  
Краљице Наталије 37, Београд  
e-mail: direktor@mg.edu.rs

**Апстракт.** Статистичком обрадом података којима су представљена постигнућа ученика у решавању задатака из области геометрије на пријемном испиту за упис у први разред Математичке гимназије, као и обрадом података којима су представљена постигнућа ученика у решавању задатака из области геометрије на тесту способности за упис у седми разред ОШ у Математичкој гимназији, закључено је да су постигнућа ученика на значајно нижем нивоу у односу на област алгебре.

Посматрани узорак су постигнућа ученика из претходних 10 година.

Кроз конкретне задатке приказаћу најчешће грешке и задатке који су најслабије урађени, као и резултате истраживања међу ученицима првог и седмог разреда Математичке гимназије у којима ће бити приказано њихово знање из области геометрије које су стекли у ОШ.

**Кључне речи:** Геометрија, пријемни у Математичкој гимназији, талентовани ученици

---

## Библиографија

- [1] Ognjanović S. Matematika 10+. Rešeni zadaci sa prijemnih ispita u Matematičkoj gimnaziji. *Krug Beograd*, 2019.
- [2] Zolić A., Ognjanović S. Materijali za upis u 7. razred Matematičke gimnazije. *Matematička gimnazija Beograd*, 2017.
- [3] Altaras Dimitrijević Ana, Sanja Tatić Janevski. Obrazovanje učenika izuzetnih sposobnosti: Naučne osnove i smernice za školsku praksu. *Zuov*, 2016.

## Isolated points of Birkhoff-James orthograph in $C^*$ -algebras

**Dragoljub J. Kečkić**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16-18, 11000 Beograd, Serbia  
e-mail: keckic@matf.bg.ac.rs*

**Srđan Stefanović**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16-18, 11000 Beograd, Serbia  
e-mail: srdjan\_stefanovic@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** Birkhoff-James orthogonality in Banach spaces has been studied for many years. Recently, in [1] the orthograph related to mutual strong Birkhoff-James orthogonality in Hilbert  $C^*$ -module is introduced. In particular, in a  $C^*$ -algebra, regarded as a Hilbert  $C^*$ -module over itself, it is shown that any right invertible element is an isolated point of orthograph. The open question is whether the converse is true. We give affirmative answer in the case of unital  $C^*$ -algebras and some related results in nonunital case.

**Keywords:** Birkhoff-James orthogonality;  $C^*$ -algebra; orthograph; isolated points; states

### References

- [1] **L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina.** Orthograph related to mutual strong Birkhoff-James orthogonality in  $C^*$ -algebras. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 14(4) (2020), 1751 - 1772.

## Distortion theorems and estimates of Schwarz-Pick type for harmonic quasiconformal mappings - Review of the results of the Seminar for Complex Analysis in Belgrade

**Miljan Knežević**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Republic of Serbia  
e-mail: kmiljan@matf.bg.ac.rs*

**Marek Svetlik**

*University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Republic of Serbia  
e-mail: svetlik@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** In this short presentation we will give a review of the results of the Seminar for Complex Analysis in Belgrade related to some types of the distortion theorems and estimates for harmonic quasiconformal mappings, which are of Schwarz-Pick type.

**Keywords:** Harmonic mappings; quasiconformal mappings; hyperbolic metric, the quasi-hyperbolic metric, Lipschitz and co-Lipschitz properties.

### References

- [1] **M. Knežević, M. Mateljević.** On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol 334, No 1, 2007, 404-413.
- [2] **M. Mateljević, V. Božin, M. Knežević.** Quasiconformality of Harmonic Mappings Between Jordan Domains. *Filomat*, Vol 24, No 3, 2010, 111-124. **M. Mateljević.** The Growth of Gradients of Solutions of Some Elliptic Equations and Bi-Lipschicity of QCH. *Filomat*, Vol 31, No 10, (2017), 3023-3034.
- [3] **M. Mateljević.** Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, Volume 464, Issue 1, 78-100.
- [4] **M. Mateljević, M. Svetlik** Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings *Appl. Anal. Discrete Math.*, 14(2020), 150-168.

## Change-point ideas in multiple testing: estimating the proportion of false null hypotheses

**Anica Kostic**

*London School of Economics*  
*e-mail: a.kostic@lse.ac.uk*

**Piotr Fryzlewicz**

*London School of Economics*  
*e-mail: p.fryzlewicz@lse.ac.uk*

**Abstract.** Estimating the proportion of false null hypotheses among a large number of independently tested hypotheses is an important problem in multiple testing literature. In the sequence of sorted p-values (p-value plot), false null p-values tend to be smaller and concentrated at the beginning. This suggests approximate piecewise linear shape of the p-value plot, with change-point in slope separating small from large p-values. We discuss possible applications of different change-point algorithms for segmenting the p-value plot and we propose a new method for estimating the false null proportion (Difference Of Slopes).

**Keywords:** change-point detection; multiple testing; p-values

## Од математике до информатике кроз интерактивну игру и развој алгоритамског мишљења

Александра Куч

ОШ "Ђура Јакшић" Краљево  
e-mail: aleksandra.kuc@dms.rs

**Апстракт.** Математичким образовањем подстиче се интелектуални развој ученика, логичко, аналитичко, алгоритамско и критичко мишљење. Математика помаже ученицима да стекну знања, вештине и способности које су неопходне сваком човеку у свим животним сферама и професијама. Разумевање садржаја информатике и креирање програмског кода заснива се на математичким знањима.

Игра мотивише, инспирише и покреће ка новим истраживањима до нових сазнања, што је и један од циљева наставе математике. Игра у настави пружа могућност да се брже, лакше и трајније усвоје одређени садржаји.

На пример: Функционална и оригинална решења актуелне наставе математике и рачунарства и информатике у оквиру теме Дељивост- Еуклидов алгоритам, подстакнута учењем кроз игру могу додатно допринети квалитетнијем развоју алгоритамског мишљења.

Кроз игру Еуклидове школе које постоји у три верзије, од којих је једна првонаграђени пројекат за идејно решење експоната у парку науке у организацији ШПН, ученици се на забаван начин уводе у свет програмирања без обзира на ниво постигнућа који су достигли. То је један од начина који доприноси разумевању најстаријег неизмењеног тривијалног алгоритма- Еуклидовога алгоритма.

Са друге стране, садржаји информатике се могу имплементирати у настави математике, што може олакшати и у великој мери допринети да се конкретизују апстрактни математички појмови. Употребом различитих софтвера ниво функционалног и практично примењивог знања ученика могуће је подићи на виши степен. На тај начин развија се продуктивнији члан друштва, а самим тим и продуктивнија друштвена заједница.

**Кључне речи:** алгоритам; Еуклидов алгоритам; дељивост; интерактивна игра; алгоритамско мишљење.

### Библиографија

- [1] **В. Ибраћимпашић, К. Рјанић.** *Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког дјелиоца, МАТ-КОЛ (Банја Лука), 2014, XX(1), 15 - 25.*
- [2] **В. Д. Станојловић.** *Основи педагошке дијагностике, Београд, 2017, 124 - 146.*

## Schwarz-Pick Lemma for Harmonic and Hyperbolic Harmonic Functions

**Adel Khalfallah**

*Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran 31261, Saudi Arabia  
e-mail: khelifa@kfupm.edu.sa*

**Bojana Purčić**

*Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Republic of Serbia  
e-mail: bojanaj@matf.bg.ac.rs*

**Miodrag Mateljević**

*Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Republic of Serbia  
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We establish some inequalities of Schwarz–Pick type for harmonic and hyperbolic harmonic functions on the unit ball of  $\mathbb{R}^n$  and we disprove a recent conjecture of Liu [1].

**Keywords:** Harmonic function, hyperbolic harmonic function.

### References

- [1] C. Liu , Schwarz–Pick Lemma for Harmonic Functions, *International Mathematics Research Notices*, 2021.

## O testovima saglasnosti sa Levijevom raspodelom

**Žikica Lukić**

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu  
e-mail: zikicamaster@gmail.com*

**Bojana Milošević**

*Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu  
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Levijeva raspodela je jedna od svega tri stabilne raspodele verovatnoća čija se gustina može prikazati u zatvorenom obliku. Kao takva, igra važnu ulogu u finansijama, fizici i drugim oblastima. Međutim, koliko je nama poznato, u literaturi je do sada poznat jedan specifičan test saglasnosti sa ovom raspodelom za čiju primenu se autori predložili nekoliko transformacija test statistike sa ciljem dobijanja nulte raspodele koja ima pogodan oblik. U ovom radu će biti predložen jednostavniji alternativni način primene ovog testa. Dodatno, biće predložena i nova klasa testova saglasnosti sa Levijevom raspodelom i ispitana njihova granična svojstva. Kvalitet testova biće ispitivan određivanjem empirijskih moći kao i lokalnih Bahadurovih efikasnosti.

**Ključne reči:** U-statistika; karakterizacija raspodele; Bahadurov nagib.

### Bibliografija

- [1] **M. Ahsanullah, V. B. Nevzorov.** Some Inferences on the Levy distribution. *J. Stat. Theory Appl.* 2014, 13:3, 205 - 211.
- [2] **D. Bhati, S. K. Kattumannil.** Jackknife empirical likelihood test for testing one-sided Lévy distribution. *Journal of Applied Statistics*, 2020, 47:7, 1208 - 1219.



## Klasifikacija mononuklearnih ćelija periferne krvi primenom algoritama mašinskog učenja

**Mirjana Maljković**

*Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11158 Beograd  
e-mail: mirjana@matf.bg.ac.rs*

**Aleksandar Veljković**

*Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11158 Beograd  
e-mail: aleksandar@matf.bg.ac.rs*

**Nenad Mitić**

*Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11158 Beograd  
e-mail: nenad@matf.bg.ac.rs*

**Saša Malkov**

*Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11158 Beograd  
e-mail: smalkov@matf.bg.ac.rs*

**Vladimir Brusić**

*School of Computer Science, University of Nottingham, Ningbo, China  
e-mail: vladimir.brusic@nottingham.edu.cn*

**Apstrakt.** Tehnologija za određivanje transkriptoma ćelije se koristi za prikupljanje podataka o ekspresiji velikog broja gena iz ćelija. Nad podacima o ekspresiji gena ćelija dobijenih primenom ove tehnologije mogu se primeniti metode mašinskog učenja radi izgradnje modela za tačnu klasifikaciju tipova ćelija. Osnovni izazov u obradi podataka dobijenih tehnologijom za određivanje transkriptoma je velika dimenzionalnost jer se broj gena o kojima se dobijaju podaci za svaku ćeliju meri u desetinama hiljada ćelija. Mononuklearne ćelije periferne krvi (MPK) predstavljaju skup ćelija koje imaju bitnu ulogu u pokretanju i podizanju imunog odgovora radi odbrane sistema [ 1]. MPK ćelije se dele u pet tipova. Nad četiri različita skupa podataka o ekspresiji gena MPK ćelija dobijenih primenom tehnologije za određivanje transkriptoma izvršena je klasifikacija koristeći algoritme mašinskog učenja. Na osnovu ispitivanja učestalosti ponavljanja izdvojen je skup od 1.8% reprezentativnih gena na koje su primenjene metode klasifikacije. Modeli za klasifikaciju tipova ćelija su razvijeni zasebno za svaki skup podataka o MPK ćelijama koristeći skup izabranih gena i različite algoritama klasifikacije [ 2]. Tačnost dobijenih modela za klasifikaciju je između 82,1% i 99,5%. Dobijeni rezultati ukazuju da je moguće izvršiti klasifikaciju MPK ćelija koristeći znatno manji broj gena u odnosu na broj gena dat u originalnom skupu.

**Ključne reči:** ekspresija gena; mašinsko učenje; klasifikacija; smanjenje dimenzionalnosti.

### Bibliografija

- [1] **D. D. Chaplin.** Overview of the immune response. *J. Allergy Clin. Immunol*, 2010, vol. 125, 2, S3-23.
- [2] **PN. Tan, M. Steinbach, A. Karpatne, V. Kumar** Introduction to Data Mining. *Pearson Education*, 2019, 2nd ed.

## Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u apsolutnoj i hiperboličkoj geometriji

**Vesna Marinković**

*Matematički fakultet, Studentski trg 16  
e-mail: vesnap@matf.bg.ac.rs*

**Tijana Šukilović**

*Matematički fakultet, Studentski trg 16  
e-mail: tijana@matf.bg.ac.rs*

**Filip Marić**

*Matematički fakultet, Studentski trg 16  
e-mail: filip@matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Konstruktivni problemi u geometriji predstavljaju jedan od najduže izučavanih problema u matematičkom obrazovanju. Međutim, najčešće su u fokusu konstrukcije u euklidskoj geometriji, dok se konstrukcije u hiperboličkoj geometriji ređe izučavaju.

U ovom predavanju prikazaćemo naš tekući rad na razvoju sistema za automatsko rešavanje problema konstrukcije trougla u apsolutnoj i hiperboličkoj geometriji. Najpre ćemo istaknuti koje su ključne razlike između konstrukcija u euklidskoj, apsolutnoj i hiperboličkoj geometriji, a zatim dati pregled primitivnih konstrukcija i lema koje su potrebne za rešavanje konstruktivnih problema u apsolutnoj i hiperboličkoj geometriji. Konačno, pokazaćemo na koji način smo prilagodili naš rešavač za konstruktivne probleme u euklidskoj geometriji tako da rešava i konstruktivne probleme u hiperboličkoj geometriji. Razvijeni alat je testiran na Vernikovom korpusu konstruktivnih problema i opisi konstrukcija i ilustracije rešenih problema dostupne su onlajn.

**Ključne reči:** problemi konstrukcije trougla; apsolutna geometrija; hiperbolička geometrija.

## Hardy–Littlewood theorems and the Bergman distance

Marijan Marković

University of Montenegro, Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica, Montenegro  
e-mail: marijanmmarkovic@gmail.com

**Abstract.** We consider the subclasses of bounded analytic functions on the unit disk. It is our aim to connect the smoothness of the boundary function of an analytic function in a given metric (the Bergman metric or the quasi-hyperbolic) with the mean growth of an appropriate derivative of the analytic function. The results we obtain may be considered as non-Euclidean versions of the classical Hardy and Littlewood theorems.

**Keywords:** bounded analytic functions, the Bergman metric; the hyperbolic metric, the quasi-hyperbolic metric, Lipschitz classes.

### References

- [1] P.L. Duren. Theory of HP spaces. Academic Press, New York and London, 1970.
  - [2] M. Marković. Representations for the Bloch Type Semi-norm of Fréchet Differentiable Mappings. *Journal of Geometric Analysis*, 2021, 31, 7947 - 7967.
  - [3] Sh. Yamashita. Smoothness of the boundary values of functions bounded and holomorphic in the disk. *Transaction of the American Mathematical Society*, 1982, 272, 539 - 544.
- 

## Образовни софтвер – унапређивање оцењивања

Мирослав Марић

Математички факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: maricm@matf.bg.ac.rs

Ивана Ковачевић

Филолошки факултет, Универзитет у Београду  
e-mail: ivanakovacevic980@gmail.com

**Апстракт.** У дигиталном окружењу велики изазов може представљати ваљано сумативно оцењивање. Да би се успешно обавило, требало би да буде оснажено различитим техникама формативног оцењивања, које је усмерено на сам процес учења и праћење постигнућа свих ученика у одређеном временском интервалу. Различити материјали Радне групе за образовни софтвер Математичког факултета Универзитета у Београду могли би унапредити процес усвајања знања и вештина свих ученика и студената, као и целоживотно учење свих корисника који су спремни да уче и усавршавају се. Такође, ови материјали могли би бити корисни за формативно и сумативно оцењивање ученика који наставу прате по редовном и индивидуалном образовном плану путем наставе на даљину.

**Кључне речи:** образовни софтвер; формативно и сумативно оцењивање; настава математике; настава програмирања

---

## Шварцова лема на граници за хармонијска и плурихармонијска пресликавања и неке генерализације

Миодраг Матељевић

*Српска Академија Наука и Уметности, Кнеза Михаила 35, Београд*  
*e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Никола Мутавцић

*Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 36, Београд*  
*e-mail: nikolam@matf.bg.ac.rs*

**Апстракт.** У овом чланку су развијене неке методе за истраживање резултата на тему Шварцове леме за холоморфна и плурихармонијска пресликавања између јединичних лопти у Хилбертовим и Банаховим просторима. На почетку, проширили смо класичне Шварцове леме за холоморфна пресликавања, на Хилбертове и Банахове просторе. Осим тога, генерализовали смо класичне Шварцове леме за хармонијска пресликавања у равни, и дошли до прецизније константе у овим лемама и приказали смо примену на Шварцову лему на граници, са прецизним константама, за плурихармонисјска пресликавања у Хилбертовим и Банаховим просторима. На тај начин смо дошли до побољшања и генерализације одговарајућих резултата у [ 1] и неких резултата из [ 2]. Такође, разматрали смо случај хармониских пресликавања јединичне лопте у  $\mathbb{R}^n$  у јединичну лопту у коначно димензионим, као и произвољним Хилбертовим просторима, са задатом вредношћу у координатном почетку. Ово представља генерализацију резултата добијеног у [ 3]. На крају, анализирали смо аналоган проблем за хиперболичка хармонијска пресликавања. Испоставило се да ова пресликавања имају нека својства, која се тичу Шварцове леме на граници, а која не поседују хармонијска пресликавања.

**Кључне речи:** Шварцова лема на граници; Плурихармонисјска пресликавања; Хилбертови простори.

### Библиографија

- [1] H. Li and M. Mateljević, *Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings in the unit ball*.
- [2] S. Chen, H. Hamada, S. Ponnusamy, R. Vijayakumar *Schwarz type lemmas and their applications in Banach spaces*, arXiv:2110.02767v1 [math.CV]
- [3] D. Kalaj, *Heinz-Schwarz inequalities for harmonic mappings in the unit ball*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **41** (2016), 457–464.

## Перформансе модификованих верзија Калмановог филтера у праћењу покретног циља

Кристина Матовић

Математички факултет, Студентски трг 16  
e-mail: pd212013@alas.matf.bg.ac.rs

**Апстракт.** Калманов филтер је оптимални рекурзивни алгоритам за обраду података који даје добре резултате у оцени стања динамичких система из зашумљених и некомплетних мерења. Рачунарски је ефикасан и једноставан за имплементацију у реалном времену, јер при новом мерењу не захтева поновну обраду претходних података. Једна од важних примена Калмановог филтера је у праћењу покретних циљева, где посебан изазов представљају системи са нелинеарном динамиком и наглим променама у динамици система. Код система са нелинеарном динамиком традиционални Калманов филтер не даје добре резултате у оцени стања система. Овај проблем се може превазићи применом проширеног Калмановог филтера, односно линеаризацијом система пре примене Калмановог филтера, или применом Калмановог филтера без мириса заснованог на *UT* (енгл. *Unscented Transform*) трансформацији, која за разлику од методе линеаризације не апроксимира нелинеарну функцију, него расподелу случајног вектора детерминисаним избором фиксног броја тзв. сигма тачака у простору тог вектора. У овом раду анализиране су перформансе претходно поменутих модификованих верзија Калмановог филтера на примерима праћења покретног циља на основу радарских детекција, дата су поређења таквих алгоритама и назначене предности и мане њихове употребе.

**Кључне речи:** проширени Калманов филтер; Калманов филтер без мириса; радарски системи.

### Библиографија

- [1] **P. S. Maybeck.** Stochastic models, estimation, and control. *Academic press*, 1982
- [2] **D. Simon.** Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. *John Wiley & Sons*, 2006.
- [3] **S. J. Julier, J. K. Uhlmann.** New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *In Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI, International Society for Optics and Photonics*, 1997, Vol. 3068, pp. 182-193.

## Cauchy problem for the Emden–Fowler equation with initial point on the positive part of $y$ -axis

**Marija Mikić**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade  
e-mail: marijam@matf.bg.ac.rs*

**Đorđe Krtinić**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade  
e-mail: georg@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** We consider the Cauchy problem for the Emden–Fowler equation  $y'' - x^a y^\sigma = 0$ , with parameters  $a \in \mathbb{R}$  and  $\sigma < 0$ , for which the initial value of the solution belongs to the positive part of  $y$ -axis. Necessary and sufficient conditions on the parameters of the equation for the Cauchy problem with initial value on the positive ordinate axis to have a solution are obtained. We consider regular, as well as an improper initial value of the derivative of the solution. In the cases where solution exists, we study its uniqueness. We give an example that shows that the solution of the Cauchy problem does not have to be unique.

**Keywords:** Emden-Fowler differential equation; Cauchy problem; existence and uniqueness of solution.

### References

- [1] **J. Knežević - Miljanović.** Vertical asymptotes of solutions of the Emden–Fowler equation. *Differential Equations*, 2007, 43.12, 1753 – 1755.
- [2] **Đ. Krtinić, M. Mikić.** Note on asymptotical behavior of solutions of Emden–Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem. *Miskolc Mathematical Notes*, 2017, 18.1, 285 – 294.
- [3] **Đ. Krtinić, M. Mikić.** Existence and uniqueness of solutions of some Cauchy problems for the Emden–Fowler equation. *Differential Equations*, 2021, 57.8, 1014 – 1022.

## Функционална веза између резонанци три тела у средњем кретању и брзина Јарковског

Ivana Milić Žitnik

*Astronomska opservatorija, Volgina 7, 11000 Beograd, Srbija*  
*e-mail: ivana@aob.rs*

**Апстракт.** Пroučавано је кретање астероида преко резонанци у средњем кретању (RSK) три тела са Јупитером и Сатурном са укљученом брзином промене велике полуосе астероида под утицајем ефекта Јарковског. Истраживање је изведено помоћу бројних интеграција у ORBIT9 интегратору са 84000 тест астероида. Рачунали смо време зурења/кашњења,  $dtr$ , настало услед утицаја 7 RSK три тела на кретање тест астероида са 10 позитивних и 10 негативних брзина Јарковског у њиховој великој полуоси. Изведене су две једначине које одређују функционалну везу између просечног времена проведеног у резонанци  $\langle dtr \rangle$ , јаčине резонанце  $SR$ , и промене велике полуосе услед ефекта Јарковског  $da/dt$  са орбиталним ексцентрицитетима астероида у интервалу  $(0, 0.1)$ . Упоредјујући вредности  $\langle dtr \rangle$  из бројних интеграција са вредностима добијеним помоћу изведених једначина, анализирале су вредности  $\langle dtr \rangle$  у свим разматраним RSK три тела за сваку брзину  $da/dt$ . Главни закључак је да се аналитичке и бројне процене просечног времена  $\langle dtr \rangle$  веома добро слажу, како за позитивне тако и за негативне брзине  $da/dt$ . Коначно, ово истраживање [3] је показало да је функционална веза добијена за RSK три тела аналогна свим нашим претходним добијеним за RSK два тела ([1],[2]).

**Кључне речи:** астероиди; бројне методе; ефекат Јарковског; резонанце у средњем кретању.

### Библиографија

- [1] I. Milić Žitnik, B. Novaković. The role of mean-motion resonances in semimajor axis mobility of asteroids. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 816, L31 (6pp).
- [2] I. Milić Žitnik. The functional relation between mean motion resonances and the Yarkovsky force for small eccentricities. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2020, 498, 4465 (7pp).
- [3] I. Milić Žitnik. The functional relation between three-body mean motion resonances and the Yarkovsky drift speeds. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2021, 507, 5796 (8pp).

## Примена GeoGebra софтвера приликом усвајања геометријских појмова у четвртог разреда основне школе

Милан Миликић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина  
e-mail: milikic.milan@yahoo.com

**Апстракт.** Образовни софтвери нуде бројне могућности процесу наставе, а посебно почетној настави математике. У том контексту, GeoGebra софтвер омогућава ученицима лакше савладавање и превазилажење потешкоћа у разумевању садржаја који се односе на геометријске појмове. Циљ рада јесте да утврдимо утицај примене софтверског пакета GeoGebra на образовна постигнућа ученика четвртог разреда основне школе. Са тим циљем спровели смо истраживање засновано на експерименту са паралелним групама на узорку од 165 ученика, у оквиру којег смо испитивали да ли реализација наставе уз примену софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије позитивно делује на повећање нивоа образовних постигнућа ученика у односу на класичан начин извођења наставе. На основу резултата добијених истраживањем, можемо закључити да су ученици обухваћени експерименталним програмом постигли боље резултате на финалном мерењу постигнућа у односу на ученике који су пратили наставу организовану на класичан начин. Овом студијом показали смо да примена софтверског пакета GeoGebra доприноси повећању нивоа постигнућа ученика, позитивно утиче на превазилажење потешкоћа у савладавању и омогућава лакше разумевање садржаја геометрије.

**Кључне речи:** GeoGebra; геометрија; постигнућа ученика; почетна настава математике.

### Библиографија

- [1] **J. Y. Boo, K. E. Leong.** Teaching and Learning of Geometry in Primary School Using GeoGebra. *In Proceedings of the 21st Asian Conference on Technology in Mathematics, Pattaya, Thailand*, 2016, pp. 289 - 300.
- [2] **Z. Ismail, S. N. A. Rahman.** Learning 2-dimensional and 3-dimensional geometry with Geogebra: Which would students do better? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2017, 1, 121 - 134.
- [3] **D. Triwahyuningtyas, S. Rahayu, W. D. Agustin.** The impact of geogebra classic application on learning geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019.



## Java aplikacija za numeričku integraciju

**Miloš Mićović**

*student doktorskih studija Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73  
e-mail: mm215020p@student.etf.bg.ac.rs*

**Sara Lazić**

*student master studija Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73  
e-mail: ls213238m@student.etf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Aplikacija, rađena u programskom jeziku Java, se zasniva na primeni algoritama iz numeričke matematike. Aplikacija računa integrale trapeznom formulom, Simpsonovom formulom, kao i Rombergovom metodom integracije. Kako bi bila jednostavnija za korišćenje, implementiran je grafički korisnički interfejs preko kojeg korisnik bira metodu kojom želi da rešava integral, ali i unosi integrabilnu funkciju i granice integrala preko kalkulatora koji je sastavni deo aplikacije. Za rad sa izrazima implementirani su algoritmi za prebacivanje izraza iz infiksne u postfiksnu notaciju, kao i za izračunavanje izraza u postfiksnoj notaciji. Trenutno aplikacija računa vrednost integrala elementarnih funkcija, kao i zbirova, razlika, proizvoda i količnika elementarnih funkcija i uspešno ispisuje postupak rešavanja.

**Ključne reči:** Java aplikacija; numerička integracija; trapezna formula; Simpsonova formula; Rombergova metoda integracije.

## Neki uočeni problemi u realizaciji srednjoškolskih tema: stepenovanje, korenovanje i eksponencijalna funkcija

**Siniša Mozetić**

*Šabačka gimnazija*  
e-mail: *sinisamozetic@gmail.com*

**Miloš Pušić**

*Prva beogradska gimnazija*  
e-mail: *milos.pusic@prvabeogim.edu.rs*

**Apstrakt.** U nastavi matematike u drugom razredu srednje škole uočene su određene nedoumice i pitanja vezana za nastavne teme: korenovanje, stepenovanje i eksponencijalna funkcija. Naime, dosledna primena postojećih pravila i definicija dovodi do toga da neka očigledna rešenja jednačina ili sistema jednačina bivaju odbačena, što kod učenika često izaziva konfuziju. U radu su prikazana tri problema ovog tipa koja su identifikovana u navedenim oblastima, a zatim i način da se oni prevaziđu, te je predloženo uvođenje novog simbola i pravila čijom primenom se dolazi do tačnih i potpunih rešenja učenih problema. Ceo koncept je testiran u nastavi sa pozitivnim ishodom, a provera koncepta je realizovana u periodu od 3 godine u ukupno 6 odeljenja, na skupu od preko 180 učenika.

**Ključne reči:** korenovanje, stepenovanje, eksponencijalna funkcija

### Bibliografija

- [1] **Myškis Anatolij** Lectures In Higher Mathematics *Mir*, 1972, 262-264.
- [2] **Đuro Kurepa** Viša algebra *Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije*, 1979, 101, 124-135.

## Procjena stepena razumijevanja geometrijskih pojmova primjenom van Hieleove teorije i comparative judgement metoda

**Manuela Muzika Dizdarević**

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu  
e-mail: manuela@dizdarevic.org*

**Aleksandar Balašev-Samarski**

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu  
e-mail: samarski@gmail.com*

**Selma Zeković**

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu  
e-mail: zekovic.selma@hotmail.com*

**Apstrakt.** Geometrija je jedna od osnovnih oblasti matematike koja se izučava u osnovnoj i srednjoj školi. Posljednjih godina primjetan je trend opadanja poznavanja a posebno razumijevanja osnovnih geometrijskih koncepata kako kod studenata matematike tako i kod srednjoškolaca i osnovaca. Ta pojava je potpuno u skladu sa rezultatima PISA i TIMSS istraživanja koja su pokazala da učenici ne razumiju koncepte koji se prema međunarodnim standardima smatraju osnovnim. Sve ovo ukazuje na potrebu da se detaljno analiziraju propusti i pokušaju ispraviti greške koje postoje u važećim Nastavnim planovima i programima, ali i u načinu na koji nastavnici prezentuju predviđene nastavne sadržaje. Jedan od prvih koraka je svakako procjenjivanje stepena razumijevanja osnovnih pojmova u populaciji učenika određenog uzrasta.

U ovom izlaganju ćemo dati osnove van Hieleove teorije i comparative judgement metode za ocjenjivanje, koja je nova, veoma efikasna i popularna metoda, a zatim ćemo predstaviti rezultate istraživanja koje je sprovedeno u dvije gimnazije u Sarajevu. Cilj istraživanja je bio procjena van Hieleovih nivoa na kojima se učenici nalaze a zatim i upoređivanje dobivenih rezultata sa ocjenama dobivenim comparative judgement metodom za isti test da bi ispitali da li se comparative judgement metoda može koristiti za predikciju van Hieleovog nivoa.

**Ključne reči:** Nastava geometrije, Van Hieleova teorija, Comparative judgement metoda za ocjenjivanje

### Bibliografija

- [1] **M.J. Bisson, C. Gilmore, M. Inglis, I Jones.** Measuring Conceptual Understanding Using Comparative Judgement, *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, 2016, 2 :141–164
- [2] **A. Pollitt, C. Whitehouse.** Using Adaptive Comparative Judgement to Obtain a High Reliable Rank Order in Summative Assessment, *AQA Centre for Education Research and Policy*, 2012.
- [3] **Z. Usiskin.** Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, *University of Chicago*, 1982.

## Some generalizations of Banach Contraction Principle

**Rale Nikolić**

*University of Defence, Military Academy, Department of Natural Sciences and Mathematics,  
Veljka Lukića Kurjaka 33, 11105 Belgrade, Serbia  
e-mail: ralevb@mts.rs*

**Nataša Ćirović**

*Department of Applied Mathematics, School of Electrical Engineering, University of Belgrade  
Bulevar Kralja Aleksandra 73, P.O. Box 35-54, 11120 Beograd, Serbia  
e-mail: natasa@etf.bg.ac.rs*

**Jasmina Fijuljanin**

*University of Defence, Military Academy, Department of Natural Sciences and Mathematics,  
Veljka Lukića Kurjaka 33, 11105 Belgrade, Serbia  
e-mail: fjasmina86@gmail.com*

**Abstract.** Banach contraction principle is perhaps the most widely applied fixed point theorem in all mathematical analysis. This theorem is remarkable because of its simplicity. The theory that developed following this theorem is known as the metric fixed point theory. In this talk we will give brief overview of the most important results from metric fixed point theory. One part of these results concerns the generalization of metric spaces to be worked on. The second part of the results deals with the generalization of contractive conditions that some function needs to satisfy in order to have a fixed point.

**Keywords:** Fixed point; Menger PM-space; Continuity.

## Karma familija asteroida

### Debora Pavela

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Departman za Astronomiju, Studentski trg 16  
e-mail: debbiepavela2@gmail.com*

### Bojan Novaković

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Departman za Astronomiju, Studentski trg 16  
e-mail: bojan@matf.bg.ac.rs*

### Viktor Radović

*Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Departman za Astronomiju, Studentski trg 16  
e-mail: rviktor@matf.bg.ac.rs*

### Valerio Carruba

*Univerzitet u Sao Paulu (UNESP), Guaratingueta, SP, 12516-410, Brazil  
e-mail: vcarruba@gmail.com*

**Apstrakt.** Karma familija asteroida je grupa primitivnih ugljeničnih asteroida koja se nalazi u središnjem delu Glavnog asteroidnog pojasa, na samoj spoljašnjoj ivici 3J:1A rezonance u srednjem kretanju. Familija sadrži 317 članova. Procenili smo da je ova familija nastala katastrofičnim raspadom roditeljskog tela koje je bilo u prečniku između 34 i 41 km. Na osnovnu metode V-oblika, procenjujemo da je starost oko 137 miliona godina. Detaljna dinamička mapa regiona u kombinaciji sa numeričkim simulacijama omogućili su da rekonstruišemo dugoročnu dinamičku evoluciju familije i da identifikujemo mehanizme koji su odgovorni za evoluciju. Numeričkim simulacijama uspešno smo reprodukovali glavne karakteristike oblika familije u prostoru orbitalnih elemenata, ali se pokazalo da postoje neki regioni Karma familije koji nedostaju. Detaljnija analiza je otkrila da se u ovim regionima nalaze taminiji objekti magnitude  $H=17$ , koji još uvek nisu otkriveni. Tokom simulacija smo takođe istraživali stopu gubitka članova iz familije i otkrili da je Karma familija izgubila oko 1/3 članova sa  $H < 18,1$  mag, što odgovara objektima većim od 1.36 km. Konačno, otkrili smo da Karma familija dovodi asteroide u okolinu Zemlje putem 3J:1A rezonance. Trenutno bi u okolini Zemlje trebalo da ima oko deset članova familije koji su prečnika većeg od 1km.

**Ključne reči:** asteroidi; dinamička evolucija; rezonance.

## A Note on the Generalized Narayana's Cows Sequence

**Marko Pešović**

*University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Bulevar kralja Aleksandra 73  
e-mail: mpesovic@grf.bg.ac.rs*

**Zoran S. Pucanović**

*University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Bulevar kralja Aleksandra 73  
e-mail: pucanovic@grf.bg.ac.rs*

**Abstract.** The importance of integer sequences as well as structured matrices and their applications, motivated us to explore this topic. In particular, the Narayana's cows sequence, which is closely related to the Fibonacci sequence, has recently had various applications in applied mathematics. We will give one natural generalization and try to establish further connections between structured matrices and integer sequences of the Narayana type. For some more recent results in this area, we recommend [ 1, 2, 3].

**Keywords:** Narayana's cows sequence;  $r$ -circulant matrix; Eigenvalue of a matrix.

### References

- [1] **E. Andrade, D. Carrasco-Olivera, C. Manzaneda.** On circulant like matrices properties involving Horadam, Fibonacci, Jacobsthal and Pell numbers. *Lin. Algebra Appl.*, 2021, 617, 100 - 120.
- [2] **G. Bilgici.** The generalized order  $k$ -Narayana's cows numbers. *Math. Slovaca*, 2016, 64, 794 - 802.
- [3] **X. Lin.** On the Recurrence Properties of Narayana's Cows Sequence. *Symmetry*, 2021, 13, 149.

## Ocenjivanje parametara u višedimenzionalnim stohastičkim difuzijama zasnovano na diskretizacijama deljenja vektorskog polja

**Predrag Pilipović**

*Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetspark 5, 2100 Copenhagen Ø, Denmark  
e-mail: predrag@math.ku.dk*

**Apstrakt.** Stohastičke difuzije su relativno nov i obećavajući matematički aparat za modelovanje evolucije fenomena sa neprekidnim vremenom. Najčešće pronalaze primenu u ekonomiji i finansijama, ali i u prirodnim naukama, na primer, pri modelovanju širenja infektivnih bolesti ili modelovanju biohemijskih i genetskih procesa. Bez obzira na njihovu primenu, matematička teorija je dosta kompleksna, pa je modelovanje stohastičkim difuzijama najčešće istraživano isključivo iz teorijske perspektive. Kada je reč o statističkom zaključivanju o modelima zasnovanim na stohastičkim difuzijama, najprimenljiviji je Bajesovski pristup koji je dosta razvijen i pouzdan, ali i računarski zahtevan. Ideja ovog rada jeste da istraži frekvencionistički pristup ocenjivanja parametara stohastičke difuzije, sa fokusom na hipoeliptične difuzije, na osnovu aproksimacije funkcije verodostojnosti. S obzirom na to da je uzorak uvek diskretan, potrebno je diskretizovati odgovarajuću stohastičku diferencijalnu jednačinu. Proces diskretizacije nije trivijalan i zahteva odabir one diskretizacije koja će sačuvati odgovarajuća svojstva neprekidnog modela. Prema tome, diskretizacija će uticati na aproksimaciju funkcije verodostojnosti, a samim tim i na statistička zaključivanja. U radu istražujemo dve metode diskretizacije zasnovane na deljenju vektorskog polja i to metodu Li-Trotera i metodu Stranga. Pokazujemo da metoda Stranga aproksimira prve momenete bolje od metode Li-Trotera, što će omogućiti pokazivanje postojanosti i asimptotske normalnosti ocena dobijenih pomoću ove metode.

**Ključne reči:** ocenjivanje parametara; hipoeliptične difuzije; metode deljenja.

### Bibliografija

- [1] **Christiane Fuchs.** Inference for diffusion processes with applications in life sciences. *Berlin: Springer*, 2013.
- [2] **Susanne Ditlevsen, Adeline Samson.** Hypoelliptic diffusions: filtering and inference from complete and partial observations. *Journal of the Royal Statistical Society*, Volume 81, Issue 2, April 2019.
- [3] **Anna Melnykova.** Parametric inference for hypoelliptic ergodic diffusions with full observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2018.

---

## O normama $k$ -cirkularnih matrica sa Fibonačijevim brojevima

**Biljana Radićić**

*Univerzitet Singidunum, Danijelova 32 i Bulevar Peka Dapčevića 47a, 11 000 Beograd, Srbija  
e-mail: bradicic@singidunum.ac.rs*

**Apstrakt.** Neka je  $k$  proizvoljan kompleksan broj. Predmet razmatranja u ovom radu su  $k$ -cirkularne matrice koje pripadaju klasi Teplicovih matrica tj. klasi matrica čija je karakteristika da duž glavne dijagonale imaju isti element, što važi i za svaku dijagonalu paralelnu glavnoj dijagonali. Razmatranje je usmereno na  $k$ -cirkularne matrice sa prvim redom  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , kao i na  $k$ -cirkularne matrice sa prvim redom  $(\frac{1}{F_1}, \frac{1}{F_2}, \dots, \frac{1}{F_n})$ , gde je  $F_n$   $n$ -ti Fibonačijev broj. Za navedene matrice analizirane su sledeće norme: 1-norma,  $\infty$ -norma, Euklidska i spektralna norma. Za neke od navedenih normi određene su gornja i donja granica tj. interval u okviru kojih se može naći njihova vrednost, dok su za neke norme određene njihove tačne vrednosti.

**Ključne reči:**  $k$ -cirkularne matrice; Fibonačijevi brojevi; norme matrica.

---

## Gröbner bases over commutative von Neumann regular rings

**Maja Roslavcev**

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade  
e-mail: roslavcev@matf.bg.ac.rs*

**Abstract.** A von Neumann regular ring  $R$  is a ring in which for every element  $a \in R$  exists  $b \in R$  such that  $a = aba$  (see [1], [2]). We assume that  $R$  is a commutative von Neumann regular ring and prove that for every finitely generated ideal  $I$  in the ring of polynomials  $R[X]$  there exists a Gröbner basis  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  for  $I$ , that is,  $LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_k) \rangle$  ([3]). This is proved by using only the defining property of the ring  $R$ . The proofs of the lemmas which enable us to prove this result also contain methods for finding the Gröbner basis. We also present an example of an ideal in  $R[X]$ , where  $R$  is a von Neumann regular ring given as a product of finite fields. In that example we demonstrate these methods for determining the Gröbner basis.

**Keywords:** Gröbner basis; commutative von Neumann regular ring; ideal in a polynomial ring.

### References

- [1] **K. R. Goodearl.** Von Neumann regular rings. *Monographs and Studies in Mathematics, No. 4, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.*
- [2] **D. F. Anderson, A. Badawi.** Von Neumann regular and related elements in commutative rings. *Algebra Colloq., 19, Spec 1, 2012, pp. 1017 - 1040.*
- [3] **Z. Z. Petrović, M. Roslavcev.** Commutative von Neumann regular rings are 1-Gröbner. *Appl. Anal. Discret. Math.*, accepted for publication.



## On Carleson-type embeddings for weighted harmonic mixed norm spaces

Ivana Savković

Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Bulevar vojvode Stepe Stepanovića 71  
e-mail: ivana.savkovic@mf.unibl.org

**Abstract.** We study weighted mixed norm spaces of harmonic functions defined on smoothly bounded domains in  $\mathbb{R}^n$ . Our principal result is a characterization of Carleson measures for these spaces. Result in the upper half space  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  is obtained by Arsenović and Shamoyan in [ 1]. In 2013, Hu and Lv obtained result for unweighted mixed norm spaces on smoothly bounded domains in  $\mathbb{R}^n$  (see [ 3]). Results of Engliš obtained in 2015, concerning the weighted Bergman kernel (see [ 2]), enable us to generalize that result by allowing power-type weights. First we obtain an equivalence of norms on these spaces. We use estimates of the weighted Bergman kernel to obtain estimates of its integral means. Then, we estimate norms of test functions which are important in proving our main result. Finally, we give a necessary and sufficient condition for the embedding of the weighted harmonic mixed norm space  $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$  into  $L^{p,q}(\Omega, d\mu)$  where  $\alpha > 0$ ,  $\mu$  is a Borel measure on  $\Omega$  and  $1 < p, q < \infty$ .

**Keywords:** Carleson measures; mixed norm spaces; embedding theorem.

### References

- [1] **Arsenović, M. and Shamoyan, R.F.** On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 2013, 37(1), 45–64.
  - [2] **M. Engliš.** Boundary and singularity of Poisson and harmonic Bergman kernel, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , 2015,429, 233-272.
  - [3] **Z. Hu. and X. Lv.** Carleson type measures for harmonic mixed norm spaces with application to Toeplitz operators, *Chinese Annals of Mathematics, Series B* , 2013, 34B(4), 623–638.
- 

## Rigidity of minimal Lagrangian diffeomorphisms between spherical cone surfaces

Andrea Seppi

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, France  
e-mail: andrea.seppi@univ-grenoble-alpes.fr

**Abstract.** Minimal Lagrangian maps play an important role in Teichmüller theory, with important existence and uniqueness results for hyperbolic surfaces obtained by Labourie, Schoen, Bonsante-Schlenker, Toulisse and others. In positive curvature, it is thus natural to ask whether one can find minimal Lagrangian diffeomorphisms between two spherical surfaces with cone points. In this talk we will show that the answer is negative, unless the two surfaces are isometric. As an application, we obtain a generalization of Liebmann’s theorem for branched immersions of constant curvature in Euclidean space. This is joint work with Christian El Emam.

## Problem $p$ -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa $r$ -alokacijskom šemom: matematički model i metode rešavanja

**Zorica Stanimirović**

*Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Srbija  
e-mail: zoricast@matf.bg.ac.rs*

**Olivera Stancić**

*Ekonomski fakultet, Liceja Kneževine Srbije 3, Kragujevac, Srbija  
e-mail: olivera.stancic@kg.ac.rs*

**Apstrakt.** U ovom radu je razmatran problem  $p$ -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa  $r$ -alokacijskom šemom (engl. Uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub Maximal Covering Problem – UrApHMCP). Cilj UrApHMCP je odrediti optimalne lokacije tačno  $p$  habova i pridružiti svakog korisnika skupu od najviše  $r$  uspostavljenih habova, tako da se maksimizuje ukupan protok po svim pokrivenim parovima snabdevač-korisnik, uz pretpostavku binarnog ili parcijalnog pokrivanja. Izložena je matematička formulacija problema, a zatim su predložene i upoređene dve metaheuristike za njegovo rešavanje - osnovna metoda promenljivih okolina (engl. Basic Variable Neighborhood Search -BVNS) i opšta metoda promenljivih okolina (engl. General Variable Neighborhood Search - GVNS). Rezultati testiranja predloženih metaheuristika na instancama problema veličine do 1000 čvorova ukazuju na njihovu efikasnost u pogledu kvaliteta rešenja i brzine izvršavanja, u oba slučaja pokrivanja.

**Ključne reči:**  $p$ -hab problem maksimalnog pokrivanja; Binarno i parcijalno pokrivanje;  $r$ -alokacijska šema; Osnovna metoda promenljivih okolina; Opšta metoda promenljivih okolina.

## Approximating energy of wine glass cycles and paths

**Dorđe Stevanović**

*Ktitor 35, Niš, Serbia  
e-mail: st.djole@yahoo.com*

**Ivan Damnjanović**

*University of Niš, Faculty of Electronics, Aleksandra Medvedeva bb, Niš, Serbia  
e-mail: ivan.damnjanovic@elfak.ni.ac.rs*

**Dragan Stevanović**

*Mathematical Institute SANU, Kneza Mihaila 36, Belgrade, Serbia  
e-mail: dragan\_stevanovic@mi.sanu.ac.rs*

**Abstract.** The energy  $\mathcal{E}(G)$  of a graph  $G$  is the sum of absolute values of the eigenvalues of its adjacency matrix. Recently, Akbari, Alazemi and Anđelić [1] proved that  $\mathcal{E}(G) \leq 2\mu(G)\sqrt{\Delta(G)}$  holds when  $G$  is connected and  $\Delta(G) \geq 6$ , where  $\mu(G)$  is the matching number, while  $\Delta(G)$  is the maximum vertex degree of  $G$ . Despite relying extensively on the bound  $\Delta(G) \geq 6$  in the proof, they conjectured that the same inequality is also valid when  $2 \leq \Delta(G) \leq 5$ . Here we first showcase the process of finding small counterexamples to this conjecture by software tools. These small counterexamples lead to two aptly named infinite families—*wine glass cycles and paths*. We illustrate an elegant use of elementary calculus to approximate energy of these graphs.

**Keywords:** Graphs; Energy; Matchings.

### References

- [1] **S. Akbari, A. Alazemi, M. Anđelić.** Upper bounds on the energy of graphs in terms of matching number. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2021, 15, 444–459.

## Heuristički pristup rešavanju lokacijskog problema ograničenih kapaciteta sa nadmetanjem sa delimičnim zadovoljenjem potražnje

Jovana Tomić

Narodna banka Srbije, Nemanjina 17, Beograd  
e-mail: tomicjovana3@gmail.com

**Apstrakt.** Cilj svake kompanije kada uđe na određeno tržište jeste da maksimizuje svoj profit. Međutim, ako na tom tržištu postoji konkurencija, kompanija se susreće sa dodatnim problemima. Na ovom mestu kompaniji mogu pomoći metode optimizacije, a najviše heurističke metode ako je taj problem NP-težak. Lokacijski problem prikazan u radu je problem ograničenih kapaciteta sa nadmetanjem sa delimičnim zadovoljenjem potražnje korisnika i spada u klasu diskretne optimizacije, koji ima povezanost sa teorijom igara s obzirom na to da se rivali nadmeću na tržištu. Sastoje se u određivanju optimalnih lokacija za uspostavljanje objekata kompanije koja pruža određenu uslugu korisnicima unutar posmatrane oblasti u kojoj već postoji određen broj uspostavljenih objekata konkurentske kompanije, sa ciljem maksimizacije profita oba igrača. Problem koji se razmatra spada u klasu NP-teških problema. Za navedeni problem izložena su dva modela: u prvom modelu igrači moraju da zadovolje celokupnu potražnju korisnika, dok je u drugom modelu dozvoljeno da drugi rival zadovolji samo deo potražnje korisnika. Predložene su tri heurističke metode za rešavanje navedenog problema: genetski algoritam, osnovna metoda promenljivih okolina i memetski algoritam koji predstavlja hibridizaciju prethodna dva. Za rešavanje optimizacionog problema lidera korišćene su navedene heuristike, dok je za računanje funkcije cilja sledbenika korišćen egzaktan rešavač CPLEX.

**Ključne reči:** lokacijski problemi sa nadmetanjem; teorija igara; genetski algoritam; osnovna metoda promenljivih okolina; memetski algoritam.

### Bibliografija

- [1] A. Rahbari, S. Farahmand, M. M. Nasiri, V. Mahmoodian. A modified genetic algorithm for the capacitated competitive facility location problem with the partial demand satisfaction. *Computers and Industrial Engineering*, 2018.
- [2] A. Djenić, P. Stanojević, M. Marić, Z. Stanimirović. Memetic algorithm for solving the multilevel uncapacitated facility location problem. *Informatica* 25.3, 2014, pp. 439–466.
- [3] N. Mladenović, P. Hansen. Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research*, 1997, pp. 1097–1100.
- [4] C.R. Reeves. Genetic algorithms, modern heuristics techniques for combinatorial problem. *John Wiley and Sons*, 1993.

## Nalaženje grafova sa zadatim spektrom pomoću metode promenljivih okolina

**Petar Ćirković**

*Природно-математички факултет, Вишеградска 33, Ниш  
e-mail: petar.cirkovic@pmf.edu.rs*

**Predrag Đorđević**

*Природно-математички факултет, Вишеградска 33, Ниш  
e-mail: predrag.djordjevic@pmf.edu.rs*

**Apstrakt.** Karakterizacija grafa na osnovu spektra je aktuelan istraživački problem koji ima brojne primene. Pokazano je da graf nije nužno jednoznačno određen svojim spektrom, tj. postoje neizomorfni kospektralni grafovi, ali je obično važno da se pronađe barem jedan graf čiji je spektar jednak datom. Taj proces se naziva spektralna rekonstrukcija grafa (Spectral Reconstruction of Graphs, SRG) i spada u NP-teške optimizacione probleme. U ovom radu je na problem spektralne rekonstrukcije primenjena osnovna varijanta metode promenljivih okolina (Basic Variable Neighborhood Search, BVNS) koja je implementirana tako da uzima u obzir neke poznate osobine grafa koje se mogu izvesti na osnovu odgovarajućeg spektra. Dobijena heuristika nazvana je SRG-BVNS. Rezultati rekonstrukcije nekih poznatih grafova primenom SRG-BVNS metode poređeni su sa rezultatima dobijenim primenom AutoGraphiX paketa. Ovaj paket takođe koristi neke varijante metode promenljivih okolina, ali korisniku nije dozvoljeno da utiče na njihov izbor i redosled.

**Ključne reči:** Spektralna teorija grafova; spektralno rastojanje; spektralna rekonstrukcija grafa; metaheuristike.

---

## Digitalni repozitorijum ispitnih rokova

**Nikola Ubavić**

*Математички факултет  
e-mail: mm16310@alas.matf.bg.ac.rs*

**Apstrakt.** Na izlaganju će biti predstavljen originalan projekat „MATF Rokovi“ – digitalni repozitorijum ispitnih rokova koji su održani na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Prezentovaćemo različite aspekte ovog projekta: od dizajna baze podataka, do implementacije korisničkog okruženja. Na predavanju ćemo govoriti i o položaju  $\LaTeX$ a u komunikaciji zasnovanoj na internet tehnologijama, kao i o problemima s kojima se autor projekta suočio tokom razvoja projekta.

Projektu se može pristupiti na adresi `rokovi.ubavic.rs`

**Ključne reči:** digitalizacija,  $\LaTeX$ ; baze podataka.

## Тестови сагласности са расподелом у случају непотпуног узорка

Марија Цупарић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд  
e-mail: [marijar@matf.bg.ac.rs](mailto:marijar@matf.bg.ac.rs)

Бојана Милошевић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд  
e-mail: [bojana@matf.bg.ac.rs](mailto:bojana@matf.bg.ac.rs)

**Апстракт.** Тестови сагласности са расподелом су до сада најчешће предлагани за случај потпуног случајног узорка. Међутим у пракси се често дешава да су подаци цензурисани што резултира непотпуним узорком. У раду ће бити дат преглед неколико различитих шема цензурисања, као и приказ различитих приступа превазилажења проблема које проузрокује некомплетност узорка. Приступи ће бити упоређени на конкретном примеру скорашњих тестова експоненцијалности.

**Кључне речи:** случајно цензурисање;  $U$ -статистике; импутација недостајућих података.

### Библиографија

- [1] М. Цупарић, В. Милошевић. New characterization based exponentiality tests for randomly censored data. *TEST*, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11749-021-00787-7>
- [2] М. Цупарић. Asymptotic properties of inverse probability of censored weighted  $U$ -empirical process for right-censored data with applications. *Statistics*, 2021. <https://doi.org/10.1080/02331888.2021.1998054>

## Математичка анализа у Матлабу

Елвир Чајић

*Електротехничка школа - Тузла-Мухамеда Хеварије Ускуфија 2 75000 Тузла  
e-mail: ecajic86@gmail.com*

Виолета Никодиновић

*Медицинска школа Стевица Јовановић, Панчево-Пастерова 2, Панчево 26000, Србија  
e-mail: atelovvioleta@gmail.com*

**Апстракт.** У овом раду је приказано рјешавање математичких задатака кроз симулацију у програмском окружењу Матлаб. Графика и визуализација као и симулације су предмет свакодневних истраживања како на нашим подручјима тако и шире. У раду су представљени примјери графичке визуализације кривих у равни и простору као помоћ приликом цртања фигура датих функција дефинисаних на одређеном подручју. Рад садржи примјер фигуре циклоиде, завојнице, спирале као и дио чујасте завојнице која има широку примјену како у математици тако и електротехници. Рад ће надамо се да подстакне и будуће истраживаче да прошире знање из ове области.

**Кључне речи:** Математичка анализа, графичка визуализација, Матлаб.

### Библиографија

- [1] **D.Zupan.** Tabu search. *In:Programski jezik MATLAB, kratak tečaj*,2007, pp. 31 - 45.
  - [2] **A,Knight.** Tabu search. *In:Basic of Matlab and beyond*,2000, pp. 121 -145.
  - [3] **M.Works.** Tabu search. *In:Matlab programming Fundamentals*,2015, pp. 74 - 119.
-