UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

ZBORNIK RADOVA

SIMPOZIJUM MATEMATIKA I PRIMENE

27. I 28. MAJ 2011.

II KNJIGA

BEOGRAD 2012.

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

ZBORNIK RADOVA

SIMPOZIJUM MATEMATIKA I PRIMENE
27. I 28. MAJ 2011.

II KNJIGA

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

ZBORNIK RADOVA – SIMPOZIJUM MATEMATIKA I PRIMENE
27. I 28. MAJ 2011.
II knjiga

Izdavač
Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Za izdavača
prof. dr Miodrag Mateljević, dekan

Urednik
prof. dr. Ljubomir Protić

Odgovorni urednik
prof. dr Miodrag Mateljević

Štampa
Razvojno-istraživački centar grafičkog inženjerstva
Tehnološko-metalurškog fakulteta, Karnegijeva 4

Tiraž
300 primeraka

ISBN 978-86-7589-084-3

SADRŽAJ

GEOGEBRA - VERZIJA 4

Darko Drakulić[1]

Apstrakt: U radu je dat pregled najvažnijih novina implementiranih u verziji četiri matematičkog softverskog alata Geogebra.

1. Uvod

Geogebra je interaktivni matematički softverski alat koji povezuje geometriju, algebru i analizu a čija je osnovna namjena upotreba u nastavi matematike na svim nivoima obrazovanja. Razvoj Geogebra softvera počeo je 2001. godine kao dio master rada prof. Markusa Hohenvartera na Univerzitetu u Salzburgu. Danas Geogebra predstavlja internacionalni *OpenSource*projekat u čijem razvoju učestvuje na desetine programera i prevodilaca iz cijeloga svijeta. U vrijeme pisanja ovog rada očekuje se zvanično predstavljanje verzije 4, a na zvaničnoj stranici (http://www.geogebra.org) može pronaći nekoliko beta verzija kao i kandidat za zvaničnu verziju 4.

2. Unapređenje postojećih objekata

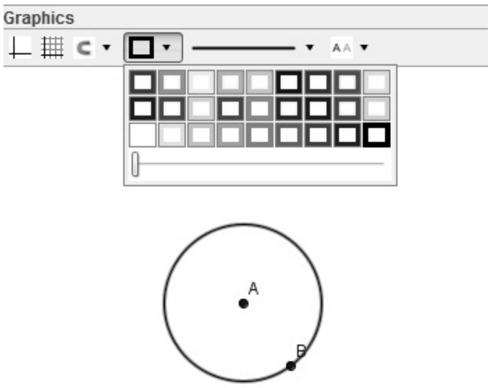
Značajan broj klasa je redizajniran s ciljem poboljšavanja funkcionalnosti i što lakšeg korišćenja. To se prije svega odnosi na matematičke algoritme koji se izvršavaju u pozadini kao i na unapređenje grafičkog korisničkog interfejsa.

U novoj verziji Geogebre postoji mogućnost aranžiranja i promjene položaja Geogebrinih interfejsa (*Graphics*, *Algebra*, *Spreadsheet*, *Construction Protocol*), a razvijen je i drugi grafički interfejs – *Graphics2* koji je vrlo koristan pri zahtjevnijim konstrukcijama u kojima možemo objekte raspoređivati u ova dva interfejsa, radi bolje preglednosti konstrukcije. Implementirana je takođe i traka za uređenje svojstava objekata (*Object Properties*) koja omogućava lake

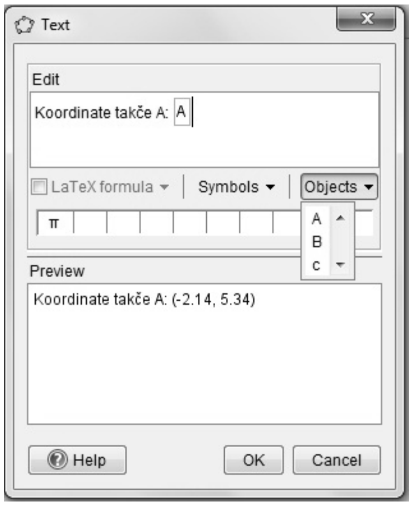
[1]Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet, ddrakulic@gmail.com

izmjene osnovih svojstava objekata – boje, tipa linije, vidljivosti objekata, načina prikaza itd. (slika 1.).

Od novina u grafičkom korisničkom interfejsu svakako treba istaknuti potpni redizajn sistema za rad sa tekstom koji omogućava lakše kreiranje dinamičkog teksta i rad sa njim. Dinamički tekst se može kreirati „pravlačenjem" tj. operacijom „*drag-and-drop*" jednačine iz algebarskog u grafički interfejs ili jednostavnim izborom objekta iz menija *Objects* u prozoru za unos teksta. Dinamički tekst nalazi u pravougaonom okviru i kao takav se razlikuje od ostalog, statičnog teksta (slika 2.).



Slika 1. Traka za uređenje svojstava objekta



Slika 2. Prozor za unos teksta

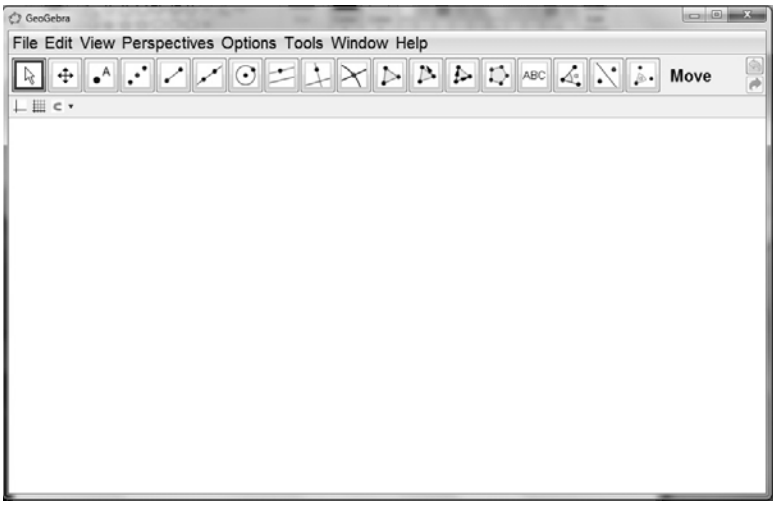
Pored navedenog, razvijen je i novi interfejs namjenjen najmlađim korisnicima Geogebre, tzv. *GeoGebra Prim* (slika 3.), iz kojeg su izbačeni „napredniji" elementi i operacije: koordinatne ose, interfejs sa algebarskim jednačinama objekata, linija za unos komandi i veliki broj ikona za kreiranje objekata, dok su preostale ikone uvećane.

3. Novi objekti

Osim poboljšanja postojećih objekata, u novoj verziji postoji i nekoliko novih, a ovdje će biti opisana dva najznačajnija – implicitne krive i intervali.

Pod implicitnom krivom (*Implicit Curve*) se podrazumijeva kriva čija je jednačina polinom proizvoljnog stepena sa promjenljivim x i y. Implicitne krive se mogu dobiti na dva načina – unosom jednačine krive u komandnu liniju (npr. $x^3 + y^3 + xy + 1 = 0$) ili komandom ImplicitCurve[<List of Points>] čiji je argument lista tačaka koja jednoznačno određuje krivu (npr. ImplicitCurve[A,B,C,D,E] konstruiše krivu (ako postoji) kroz date tačke A, B, C, D i E). Potreban (ali ne i dovoljan) uslov je da dužina ove liste mora biti 6 (za krive drugog reda), 9 (za krive trećeg reda), 14 (za krive četvrtog reda), tj. $\frac{n(n+3)}{2}$ za krive n-tog reda. Implementirane su sve standardne Geogebrine funkcije – izračunavanje udaljenosti tačke od krive, pronalaženje presjeka sa drugim objektima, translacija, rotacija, osna simetrija, centralna simetrija, inverzija, uvećanje, konstrukcija tangenti i konstrukcija asimptota (slika 4.). Obzirom da su algoritmi za pronalaženje presjeka prilično kompleksni, operacije pronalaženje presjeka krivih sa drugim objektima kao i konstrukcije tangenti na krivu mogu biti jako spore, naročito ako se radi sa krivima velikog stepena.

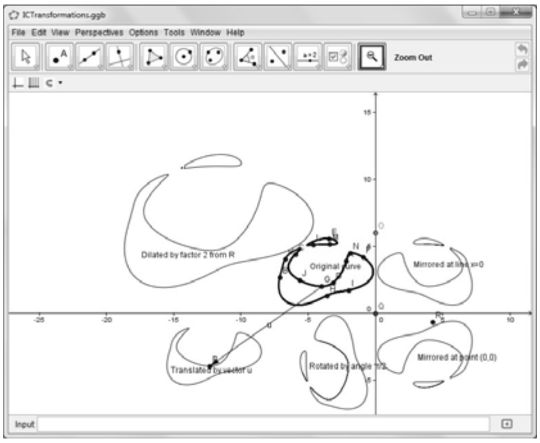
Interval predstavlja objekat koji je ograničen sa nekoliko zadatih uslova. Interval se konstruiše tako što se u komandnu liniju unesu uslovi koji određuju interval, a ukoliko postoji više uslova oni se povezuju logičkim veznikom $\wedge$, npr. $(x \geq 1) \wedge \left(y < \frac{1}{2} \right) \wedge (y < \sin(x))$ (slika 5.). Ukoliko interval ima samo dvije granice, tada se on može zadati eksplicitno – bez logičkog veznika, npr. $x < y < x^2$.



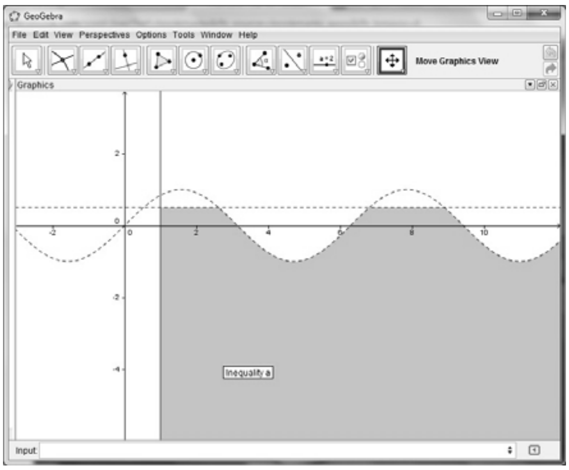
Slika 3. *GeoGebra Prim*

4. Programiranje Geogebre

Još jedna značajna novina u verziji 4 jeste ugradnja *JavaScript* interpretera u Geogebru, kao i razvoj sopstvenog skript jezika – *GeoGebraScript*. Ovo omogućava da se svakom objektu pridruži skripta koja se aktivira na jedan od događaja *OnClick* ili *OnUpdate*. Takođe se mogu kreirati i globalne skripte, vezane za cjelokupnu datoteku, a koje se aktiviraju pri učitavanju datoteke ili nekom drugom događaju.



Slika 4. Implicitna kriva četvrtog stepena i transformacije - translacija, rotacija, uvećanje, osna i centralna simetrija



Slika 5. Interval $(x \geq 1) \wedge \left(y < \dfrac{1}{2} \right) \wedge (y < \sin(x))$

Kao podrška programiranju, razvijen je objekat za rad sa dugmadima (*Button*) i objekat za unos teksta (*InputBox*) koji omogućavaju još veću interaktivnost Geogebrinih datoteka.

5. Eksport

U cilju lakše integracije Geogebrinih datoteka u druge sisteme, razvijen je modul za eksport podataka. Postoji nekoliko standarnih formata u koje se Geogebra datoteke mogu konvertovati, a to su:

- *HTML*stranice,
- *PDF* dokumenti,
- Slike (*PNG*, *EPS*, *SVG*, *EMF*)
- Aminirane *GIF*slike i
- *PSTricks*, *PGF/TrikZ*i *Asymptote*formate (za prikaz u *LaTeX* dokumentima).

Takođe je razvijena i online platforma ***GeoGebraTube*** za dijeljenje Geogebrinih dokumenata. Platforma se nalazi na adresi http://www.geogebratube.org/ a u samom programu postoji komanda *Share* koja automatski dodaje dokument u sistem ove platforme.

6. Zaključak

Spisak poboljšanja i novina implementiranih u verziji 4 alata Geogebra je mnogo duži od datog u ovom radu. Opis svih poboljšanja i novih objekata mogu se pronaći u [3], a uskoro bi trebao biti objavljen i zvanični priručnik za verziju četiri.

Trenutno se radi na razvoju dvije nove beta verzije – verzija 4.2. sadrži *CAS* modul (*Computer Algebra System*) – sistem za simbolička izračunavanja a verzija 5. omogućava konstrukcije u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.

Na Geogebra konferenciji održanoj krajem avgusta 2011. godine u Hagenbergu u Austriji, najavljeno je još novina – implementacija sistema za dokazivanje, implementacija interfejsa za neeuklidsku geometriju, bolja integracija u sisteme za učenje na daljinu i softvere za rad sa interaktivnim tablama, implementacija editora za pisanje matematičkih formula kao i razvoj sistema za određivanje jednačine lokusa (geometrijskog mjesta tačaka).

7. Literatura

[1] *Introduction to GeoGebra – Judith Hohenwarter and Markus Hohenwarter, http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf, 2008.*

[2] *GeoGebra Help – Official Manual 3.2 – Markus Hohenwarter and Judith Hohenwarter, http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf, 2009.*

[3] *GeoGebra Wiki Page - http://wiki.geogebra.org/en/Main_Page*

GEOGEBRA- ALAT ZA MODELOVANJE I DINAMIČKE KONSTRUKCIJE

Marija Radojičić[1], Aleksandra Arsić[2], Slaviša Radović[3], mentor: docent dr Miroslav Marić[4]

Rezime:Osavremenjavanje nastavnog procesa i učenja ne znači nužno primenu računara u nastavi, već promenu načina prezentovanja i usvajanja gradiva. Računari u nastavi, kao nastavno sredstvo, mogu doprineti razvoju nastavnih metoda koje će omogućiti individualizaciju nastavnog procesa, a učenje prilagoditi svakom učeniku- njegovom tempu učenja, njegovim mogućnostima, intelektualnim sposobnostima i individualnim osobenostima. Mogućnost dinamičke predstave objekata glavna je prednost novih medija u odnosu na tradicionale. Glavni zadatak nastavnika je da učeniku približi problem, da ga učini razumljivim i da pripremom interaktivnih radnih listova omogući učenicima samostalno istraživanje novih i potvrđivanje poznatih osobina objekata. U ovom smislu primena programskog paketa Geogebra, kao alat za modelovanje i dinamičke konstrukcije, može kod učenika razvijati učenje putem otkrivanja, sposobnost proučavanja problema, logičko zaključivanje i što je najbitnije individualno učenje.

O programu GeoGebra

Program GeoGebra je matematički softver koji je razvio Markus Hohenwerter sa Unverziteta u Salcburgu za poučavanje matematike u školama. Nastao je kao njegov master rad a onda postao programski paket koji se koristi širom planete. Autor je nastavio da unapređuje program kroz izradu doktorske disertacije. To je programski paket koji povezuje algebru, geometriju i analizu, pa je na osnovu toga i dobio ime. Besplatan je i dostupan na više od 50 jezika (postoji i na srpskom jeziku, tako da strani jezik nije barijera za korišćenje) , jednostavan za instaliranje, pisan u JAVI pa ni određeni operativni sistem nije preduslov za korišćenje, pored toga moguće je

[1] Osnovna škola "Desanka Maksimović", Beograd
[2] Srednja umetnička škola "Artimedia", Beograd
[3] Osnovna škola "Borislav Pekić", Novi Beograd
[4] Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

pokretati ga iz bilo kog internet pretraživača. Dobitnik je više evropskih i svetskih nagrada u oblasti obrazovnog softvera: EASA 2002, Learnie Award 2003, Digita 2004, Comenius 2004, Learnie ward 2005, Trophées du Libre 2005. Može se skinuti sa adrese www.geogebra.at kao i uputstvo za upotrebu (takođe na srpskom jeziku) i puno primera. Na istoj adresi postoji i forum namenjen prikupljanju različitih iskustva pri radu sa programom.

Zašto baš GeoGebra?

Sve softverske alate namenjenih za korišćenje u matematici možemo podeliti u dve grupe. Prvu grupu čine takozvani sistemi dinamičke geometrije (*Dynamic Geometry Systems-DGS*), a drugu grupu sistemi računarske algebre (*Computer Algebra Systems-CAS*). Uobičajno je da se u sistemima dinamičke geometrije objekti mogu posmatrati preko svojih koordinata i jednačina. Ali da se jednačinama i koordinatama zadaju objekti i da se potom pojavi grafička prezentacija tih objekata nije moguće. Za razliku od njih sistemi računarske algebre omogućuju vizuealizaciju koordinata i jednačina geometrijskih objekata. Moguće je posmatrati promene na grafičkim prikazima prilikom promene jednačina tih objekata, ali nije moguće menjati jednačine tih objekata promenom njihovih geometrijskih prikaza. GeoGebra je programski paket koji objedinjuje ova dva različita pristupa vizuealizaciji matematičkih objekata. Naime, geometrija i algebra su potpuno ravnopravno zastupljene, moguće je objekte zadavati jednačinama, potom menjati grafičke prikaze objekata i posmatrati kako se tom prilikom menjaju jednačine tih objekata i obrnuto.

Na ovakav način prikazano matematičko gradivo, učenici će lakše prihvatiti I zapamtiti matematičke pojmove, kao i gradivo namenjeno njihovom uzrastu. Pomoću programskog paketa GeoGebra pogodno je i lako predstaviti veći deo programa matematike kako za osnovnu i srednju školu, tako i program matematike namenje fakultetima i višim školama. Pored toga jako je jednostavan za upotrebu. Nastavnici i učenici mogu brzo savladati korišćenje ovog programskog paketa.

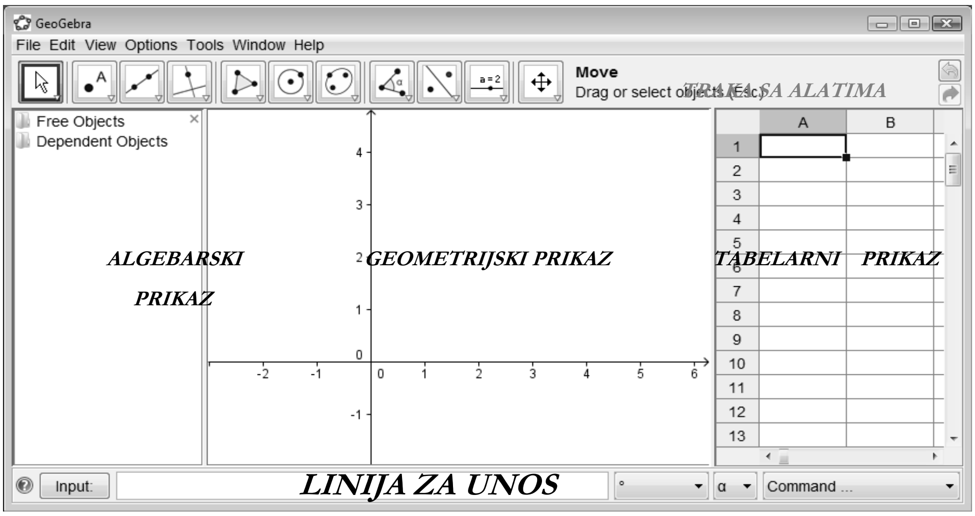
Cilj primene GeoGebre u nastavi je podizanje stručnih kompetencija nastavnika i učenika u procesu podučavanja i učenja. Podizanje kvaliteta nastave uz primenu multimedijalnih sredstava i interaktivnosti, što treba da dovede do aktivnijeg učešća učenika u vaspitno-obrazovnom procesu. Veliki problem u nastavi je pasivna pozicija učenika u školi, a veliki izazov je to promeniti i staviti učenika u aktivnu poziciju. GeoGgebra kao programski paket ima tu snagu, samo je treba dobro osmisliti i upotrebiti na pravi način.

Naravno prvo treba ovladati alatima za rad u GeoGebri Zatim dobro koncipirati zadatke i materijale za učenike i nastavnike, a onda ih i produkovati.

Algebra i GeoGebra

Dinamička geometrija, analiza i algebra su spojeni kod oblikovanja GeoGebre, softver koji podjednako koristi geometriju I algebra. Konstrukcije matematičkih objekta možete raditi vrlo jednostavn, moguće je praviti konstrukcije sa tačkama, vektorima, dužima, polupravama, pravama, mnoguglovima, kosinusnim predecima i sa funkcijama. Konstruisanim matematičkim objketima možete dinamički upravljati pomoću miša.

GeoGebra ima tri različita prikaza matematičkih objekata: grafički prikaz, algebarski (brojčani) prikaz i tabelarni prikaz. Pomoću njih možete da prikažete matematičke objekte u tri različita oblika: grafički (na primer, tačke, grafici funkcija), algebarski (na primer, koordinate tačaka, jednačine) i u ćelijama tabele. Pri tome su svi načini prikaza istog objekta dinamički povezani i automatski se prilagođavaju svakoj promeni koja se izvrši u bilo kojem prikazu, nezavisno od načina na koji su objekti nastali. Interfejsa GeoGebre prikazan je na sledećoj slici:



Najznačajnija karakteristika GeoGebre je dualni pogled na objekt: svaki izraz u algebarskom prozoru odgovara objektu u geometrijskom prozoru i obratno. Kada startujemo ovu aplikaciju pojavi će se prozor na kome dominiraju dva, nazovimo ih podprozora. Jedan je geometrijski prozor, koji se često naziva i prostor za crtanje, a drugi je algebarski prozor, to je prikazano na prethodnoj slici. Pored toga imamo i prozor za direktni unos. Pomenuta dualnost GeoGebre ogleda se u tome da se za svaki objekat koji je mišem unet u geometrijski prozor automatski u algebarskom prozoru pojavljuje jednačina. I obratno, svaki unos ili izmena u algebarskom prozoru rezultira pojavom novog objekta u geometrijskom prozoru.

Pogodnost GeoGebre je mogućnost snimanja različitih formata. Programski paket GeoGebra vam omogućava da snimite tekuću konstrukciju kao datoteku GeoGebre, a zatim da je izvezete u:

- Dinamički crtež kao Web stranica (html) – Ova stavka vam omogućava da izvezete tekuću konstrukciju kao Web stranicu, koja je spremna za jednostavno stvaranje i deljenje online matematičkih sadržaja. Na ovoj način dobijate dobijate takozvani dinamički crtež, aplet, mathlet,…

- Površina za crtanje kao slika (png, eps, …) – Koristeći ovu stavku možete snimit grafički prikaz u GeoGebri kao datoteku sa slikom na svoj računar.

- Površina za crtanje u bafer- Ovim opcijom možete kopirati grafički prikaz u bafer vašeg računara. Nakon toga se slika lako može preneti u drugi document (na primer, u tekst u program za obradu teksta)

- Izvoz – Površina za crtanje kao PSTricks - Ova stavka omogućava da snimite grafički prikaz kao datoteku sa slikom u format PSTricks file, koji je podržan u programu LaTeX.

- Izvoz – Površina za crtanje kao PGF/TikZ- Ova stavka omogućava da snimite grafički prikaz kao datoteku sa slikom u format PGF/TikZ, koji je podržan u programu LaTeX.

Pravljenje interaktivnih Web stranica

Napomenuli smo da GeoGebra omogućava pravljenje interaktivnih Web stranica, takozvanih dinamičkih crteža, od datoteka u GeoGebri. Za postizanje dinamičnosti HTML stranice moguće je koristiti već gotov JavaScript API . GeoGebra takođe poseduje skup funkcija namenjenih jeziku JavaScript, kao bi korisnici GeoGebre mogli njihovim korišćenjem da komuniciranju između GeoGebra apleta I delova stranice.

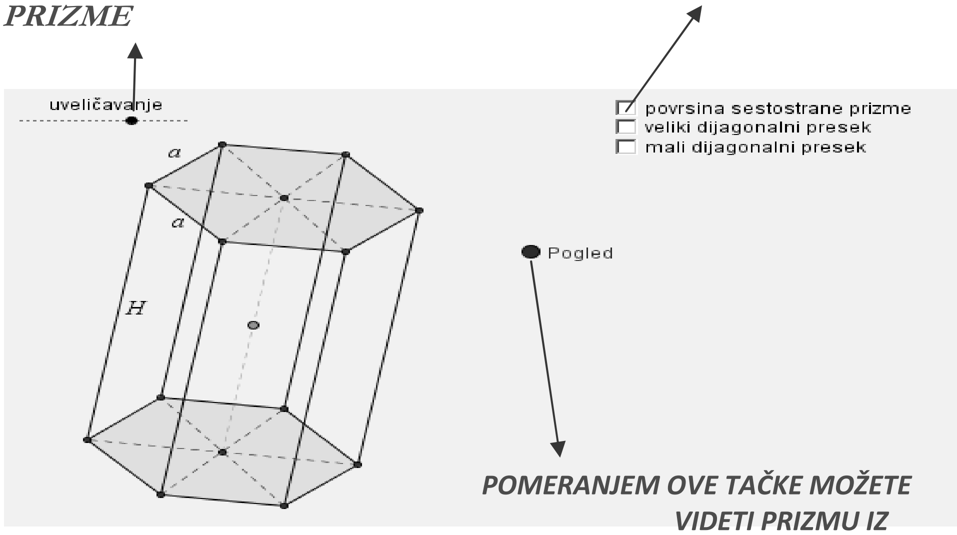
Laka implemetacija I publikovanje na WWW je još jedna pogodnost GeoGebre. Izvezena HTML datoteka (na primer, prizma.html) može da se prikaže u bilo kojem Internet pretraživaču (na primer: Mozilla, Internet Explorer, Safari). Ovakav način je pogodan da se učeniku približi materija, privuče pažnja I probudi interesovanje za samostalan rad, zato je potrebno posvetiti pažnju interaktivnosti I dinamičnosti internet strane.

Ove pogodnosti GeoGebre nam omogućavaju veoma lako kreiranje inovativnih interaktivnih i dinamičkih Web stranica i jednostavna manipulacija sadržaja koršćenjem javascript komandi. Pokazaćemo vam kako možete predstaviti površinu prizme (gradivo za III razred srednje škole).

Početni aplet:

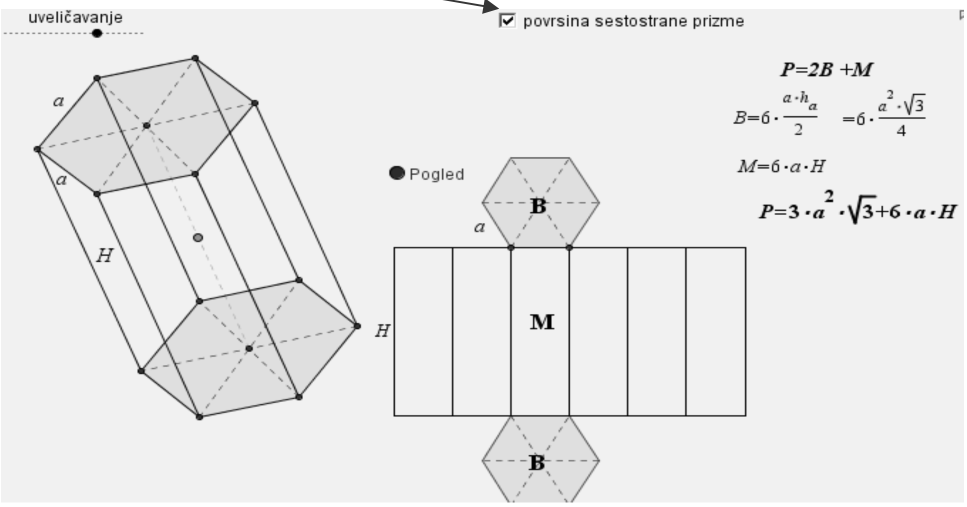
POLJA ZA POTVRDU PRIKAZIVANJE I SKRIVANJE OBJEKATA

KLIZAČ KOJI SE KORISTI ZA PROMENU VELIČINE PRIZME

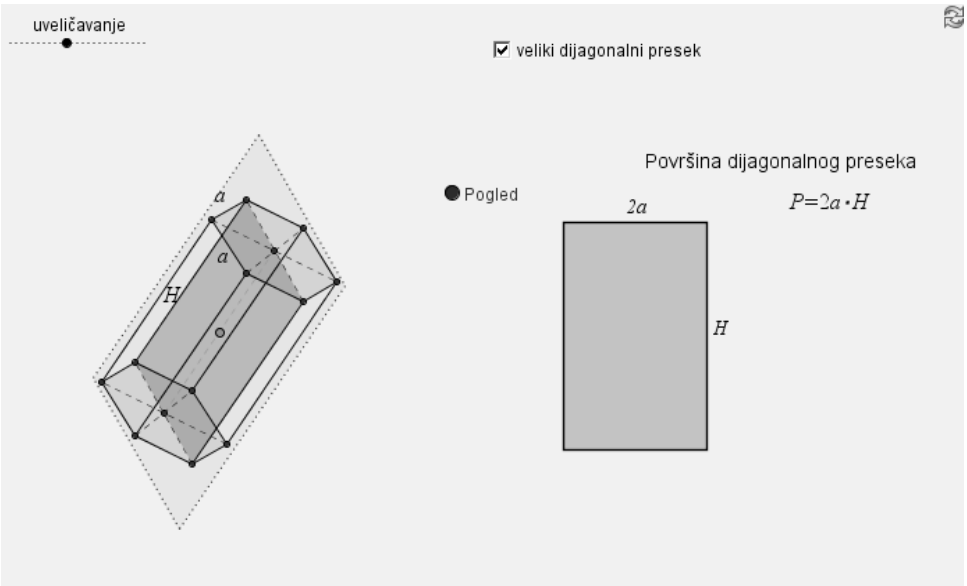


POMERANJEM OVE TAČKE MOŽETE VIDETI PRIZMU IZ RAZNIH UGLOVA I POLOŽAJA

KLIKOM NA POLJE ZA POVRŠINUŠESTOSTRANE PRIZME DOBIJA SE SLEDEĆI APLET:



KOMBINOVANJEM POLJA ZA POTVRDU PRIKAZIVANJE I SKRIVANJE OBJEKATA, TAČKE POGLED I PROMENOM KLIZAČA DOBIĆETE SLEDEĆI APLET :

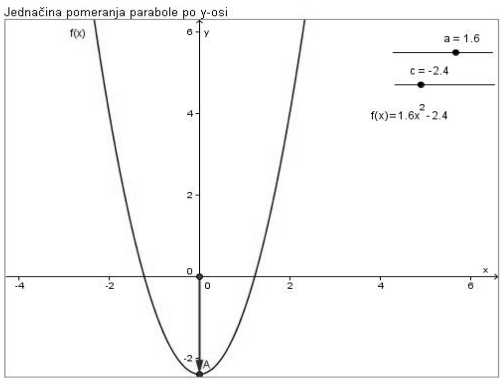


U svakom trenutku rada možete se vratiti na početni aplet klikom na refresh, koji se nalazi u gornjem desnom uglu.

Interaktivnost apleta u okviru Web stranica se povećava ako su na strani prisutni javascript dugmići koji omogućavaju interakciju teksta i apleta. Ovako pripremljene i povezane strane, postaju moćno sredstvo svakog nastavnika u približavanju apstraktnih matematičkih pojmova učenicima svih uzrasta.

Na sledećem slikama videćete primenu gore navedenih stavki.

Kvadratna jednačina i kvadratna funkcija



U ovom apletu možete videti pomeranje jednačine $f(x) = ax^2 + c$ po y - osi u zavisnosti od koeficijenta a, odnosno c. Pitanje je kako to uraditi?

1. Klikom na tačke A i povlačenjem temena A po y-osi.
2. Pomoću klizača c koji se nalazi u apletu, pomeranjem klizača c levo-desno.
3. Pomoću klizača a, u zavisnosi od toga da li je $a < 0$ ili je $a > 0$ možemo videti kako se menja grafik parabole $f(x) = ax^2$.

Primetite da kada je parametar [c>0] i kada je $a > 0$, grafik funkcije [f(x)] $f(x)$ je iznad x ose. Ukoliko je koeficijent $c > 0$ i [a < 0] tada funkcija $f(x)$ ima dve tačke [preseka] sa x-osom. Šta se dešava sa funkcijom [f(x)] kada je [c<0] ? Možemo zaključiti da se grafik funkcije $f(x) = ax^2 + c$ nalazi ispod x-ose ukoliko je $a < 0$, međutim ukoliko je $c < 0$ i [a > 0] tada funkcija $f(x)$ ima dve tačke [preseka] sa x-osom.

Prikaži [početni grafik].

```
<input type="button" value="c>0" onclick="document.ggbApplet.setValue('c', '1.5');">
```

```
<input type="button" value="preseka" onclick="document.ggbApplet.setVisible('T', true); document.ggbApplet.setColor('T', 255,0, 0);
document.ggbApplet.setVisible('B', true);document.ggbApplet.setColor('B', 255,0, 0);">
```

Elektronski udzbenik

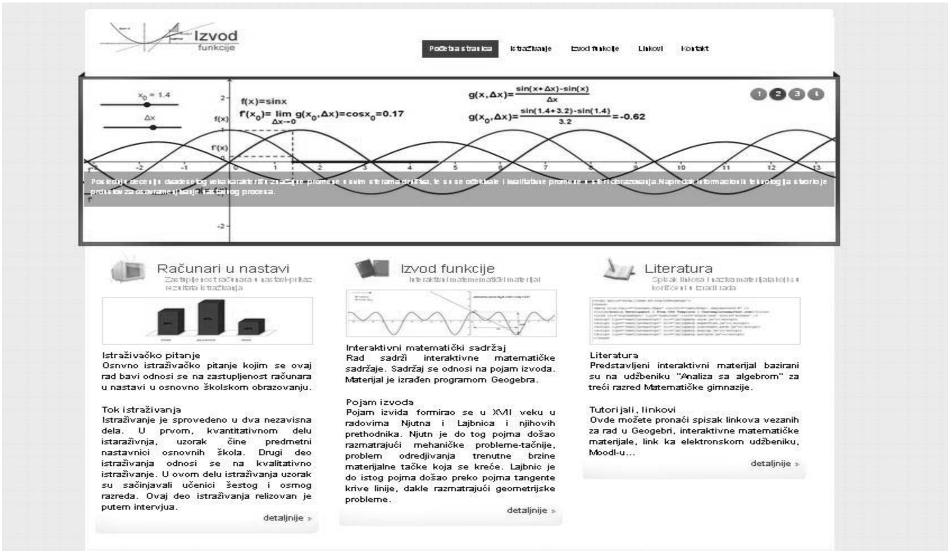
Primenom programskih paketa GeoGebre I Moodle studenti pete godine master studija Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu u saradnji sa docentom profesorom Miroslavom Marićem i Milenom Marić, rade na izradradi interaktivnih nastavnih materijala koji su javno dostupni I namanenjeni srednjoškolskoj, ali i studentskoj populaciji. Izradom i postavljanjem nastavnog materijala na Internet, korišćenjem raznih tehnologija, između ostalog i platforme Moodle, razvijaju elektronsko učenje matematike. U okviru platforme Moodle Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, studentima su dostupni elektronski matematički materijali, kao i onlajn testovi pomoću kojih mogu da provere svoje znanje. Interaktivne materijale koji su nastali korišćenjem gore navedenih programskih paketa možete pogledati na sledećim adresama:

- *http://geogebra.matf.bg.ac.rs/*
- *http://liss3.matf.bg.ac.rs/*

Korišćenjem ovih paketa u mnogome može da utiče na poboljšanje procesa nastave matematike. Permanentna edukacija nastavnika preduslov za modernizaciju same nastave, a samim tim i podizanja nivoa kvaliteta nastavnog procesa.

Primer inovacije u nastavi matematike su i sledeći sajtovi, nastali u okviru izrade master radova studenata Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu:

Adresa: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml06125/Master_rad.html



Adresa: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml06095/master/index.html

ZASTUPLJENOST RAČUNARA U NASTAVI
-PRIKAZ REZULTATA ISTRAŽIVANJA-

Marija Radojičić, Slaviša Radović, Jovan Milenković, Nevena Milivojević, Aleksandra Arsić, Mirjana Vučićević
mentor: dr Milan Božić, mr Ivan Anić

1. Uvod

U savremeno doba, kada IT tehnologija uzima prioritet i ima dominantnu ulogu u nauci, obrazovanju, privredi, postavlja se pitanje na kom stepenu razvoja se nalazi informatika u Srbiji. Stručnjaci iz naše zemlje pokazuju veliko znanje, a srpski softveri su najsigurnija izvozna roba. Nasuprot tome, korišćenje računara u obrazovnom sistemu Srbije i izvođenje nastave uz pomoć sredstava IT tehnologije nije na zavidnom nivou.

Na osnovu međunarodnih istraživanja koja mere postignuća učenika, kao što su programi OECD/PISA i TIMSS, saznajemo da su učenici iz Srbije, kada je reč o obrazovanju, u nezavidnom položaju u odnosu na svoje vršnjake iz inostranstva. Učenici iz Srbije postigli su na PISA testiranju iz matematike 2003. prosečni rezultat od 437, a 2009. od 442 poena. Bez obzira na napredak, učenici iz Srbije još uvek su daleko od međunarodnog proseka koji iznosi 500 poena.

U vezi s tim, u osnovnim školama sprovedeno je istraživanje o zastupljenosti računara u nastavi. U kvantitativnom delu istraživanja učestvovalo je oko sto nastavnika osnovnih škola, različitih godišta i iskustva. U drugom, kvalitativnom delu istraživanja, ispitivani su učenici šestog i osmog razreda. Zaključeno je da nastavnici malo koriste računar u nastavi, i da su nedovoljno informatički pismeni. Za učenike je utvrđeno da znatan deo vremena provode ispred računara, ali da ne poznaju ni jedan softver koji se koristi u obrazovne svrhe.

2 Kvantitativno istraživanje

1. Ciljevi istraživanja

Cilj ovog dela istraživanja je da se sazna koliko nastavnici koriste informacione tehnologije na samom času i u kojoj meri zadaju domaće zadatke koji zahtevaju korišćenje računara. Takođe, nastavnici su u upitniku odgovarali na pitanje o sprovođenju multimedijalne nastave u svojim školama i o matematičkom fakultetu kao instituciji koja može da im pruži adekvatnu pomoć i podršku prilikom stručnog usavršavanja. Takođe, ispitivan je i stav nastavnika kao i njihova želja da više koriste računare u svakodnevnom nastavnom procesu.

2. Hipoteze

1. Nastavnici koji koriste računar u nastavi, zadaju domaće zadatke koji zahtevaju korišćenje računara.
2. Natavnici koji imaju želju da se stručno usavršavaju i više koriste računar u nastavi, imaju pozitivan stav prema Matematičkom fakultetu, kao instituciji koja može da im pruži adekvatnu stručnu pomoć.
3. Škole nastavnika koji (ne) koriste računare u nastavi (ne) raspolažu odgovarajućim resursima za sprovođenje iste.
4. Većina nastavnika smatra da u školama u kojima su zaposleni postoje uslovi za korišćenje računara u nastavnom procesu.
5. Većina nastavnika izražava želju da više koristi računar u nastavi.

3. Opis instrumenata

Kvantitativno istraživanje sprovedeno je putem anketnog upitnika. Upitnik je sadržao pet pitanja zatvorenog tipa. Anketiranje je bilo anonimno.

4. Uzorak

U istraživanju su učestvovali nastavnici osnovnih škola, različitog starosnog doba.U ovom ispitivanju učestvovalo je 100 nastavnika iz 5 beogradskih osnovnih škola.

5. Plan obrade podataka

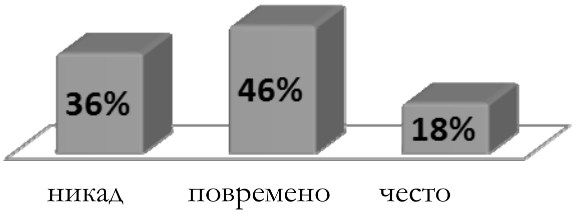
Podaci su obrađeni u Microsoft Excel-u i statističkom paketu minitab.Testirane su zavisnosti različitih varijabli iz upitnika.

6. Nalazi

a. Koristim računar u nastavi?

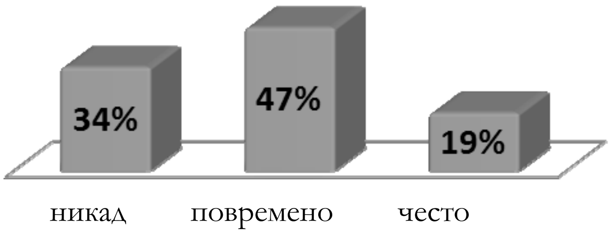
Rezultati (histogram 1.) ukazuju na slabu zastupljenost računara u nastavi.

Iz navedenih podataka zaključujemo da je procenat nastavnika koji nikada nisu koristili računar u nastavi (36%), duplo veći, od procenta nastavnika koji često koriste računar u nastavi(18%). Prilikom anketiranja (46%) nastavnika se izjasnilo da povremno koristi računar u nastavi, sa napomenom da su se nastavnici odlučivali za odgovor „povremeno" čak i ako su jednom koristili računar u nastavnom procesu u toku školske godine. Poredeći rezultate sličnih istraživanja u zemljama čiji učenici imaju daleko bolja postignuća od naših učenika, dolazimo dozaključka da su u tim zemljama, u nastavi, računari u većoj meri zastupljeni nego kod nas .Nastavnici se moraju stimulisati po pitanju osavremenjivanja nastave kako bi naši učenici imali kvalitetnije obrazovanje.



b. Zadajem domaće zadatke koji zahtevaju korišćenje računara?

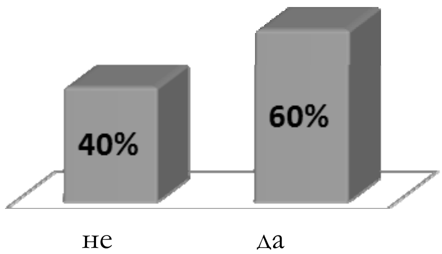
Uočava se procentualna sličnost sa prethodnim pitanjem (histogram 2.). Takođe, može se zaključiti da opremljenost škola informacionim tehnologijama u mnogome nema značaj za unapređivanje nastave upotrebom računara.



Na osnovu statističkih izračunavanja, utvrđeno je da Pirsonov koeficijent korelacije za prethodna dva pitanja iznosi: $\varrho=0,384$ a $P<0.05$.Na osnovu ovakvog koeficijenta zaključujemo da je reč o slaboj pozitivnoj korelaciji, čime je prva hipoteza dokazana.

c. U mojoj školi postoje tehničke mogućnosti za korišćenje računara u nastavi?

Zanimljivo je da su na ovo pitanje nastavnici iz iste škole, čak iz istog nastavnog predmeta davali različite odgovore (histogram 3.). Veliki broj nastavnika smatra da njihove škole ne poseduju mogućnost korišćenja računara u nastavnom procesu. Postoji, međutim, ozbiljniji problem od opremljenosti škole – negativan stav nastavnika koji, neretko dovodi do nedovoljnog iskorišćavanja raspoloživih resursa.

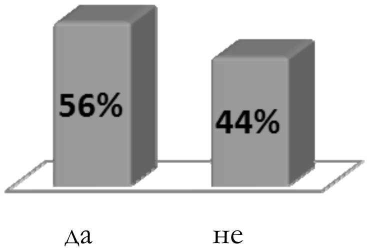


Na osnovu rezultata statističke obrade podataka: Hi – kvadrat=2.847388182, P vrednost=0.2408, zaknjučuje se da primena računara u nastavnom procesu ne zavisi od raspoloživih resursa škole koji se tiču računarske opreme, čime se treća hipoteza odbacuje.

Obzirom da je 60% ispitanika odgovorilo sa „da“ potvrđuje se četvrta hipoteza.

d. Želeo/la bih da više koristim računare u nastavi?

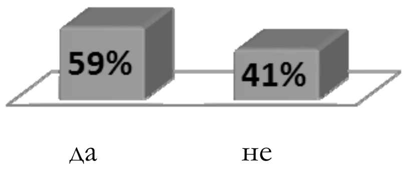
Na ovo pitanje, procenat pozitivnih i negativnih odgovora je veoma sličan. Treba reći da je dobro što postoji pozitivan stav većine, ali to nije i dovoljno za uvođenje inovacija u nastavu. Potrebno je zalaganje i napor kako bi se osavremenila nastava, a naši učenici dobili kvalitetnije obrazovanje (Histogram 4.).



Uviđamo malu procentualnu razliku između odgovora. Obzirom da je više ispitanika odgovorilo sa „da“, potvrđena je peta hipoteza.

e. Koristila bi mi pomoć matematičkog fakulteta u cilju unapređivanja nastave korišćenjem IT-ja?

Profesija prosvetnog radnika zahteva doživotno usavršavanje. Neophodno je da nastavnik unapređuje svoja znanja, veštine, metodološki pristup. Prilikom stručnog usavršavanja nastavnici se uglavnom oslanjaju na relevantne institucije. U vezi s tim, nastavnici su ispitivani o matematičkom fakultetu kao instituciji u kojoj mogu da unaprede svoja znanja iz IT tehnologije (histogram 5.).



Nalazi obrade podataka: Hi-kvadrat=34.06139427, R=0.0000, ukazuju da nastavnici koji žele da se stručno usavršavaju i više koriste računare u nastavi, imaju pozitivan stav prema Matematičkom faklutetu kao relaevantnoj ustanovi koja može da im pruži pomoć prilikom stručnog usavršavanja, čime se druga hipoteza potvrđuje.

3. Kvalitativno istraživanje

1. Cilj istraživanja

Cilj ovog dela istraživanja je formiranje slike o stavu učenika prema uvođenju računara u nastavni proces. Očekuje se da nalazi istraživanja pruže informaciju u kojoj meri učenici koriste računar i u koje svrhe. Takođe, ovim delom istraživanja ispitivana su dosadašnja iskustva učenika vezana za nastavu koja zahteva korišćenje informacionih tehnologija kao i njihovu upoznatost sa softverom koji se može koristiti u obrazovne svrhe.

2. Opis instrumenata i postupak istraživanja:

Učenici su odgovarali na postavljena pitanja. Svi ispitivani učenici su odgovarali na suštinski ista pitanja. Neka od tih pitanja glase:

1.) Koliko često koristiš računar?
2.) Da li koristiš internet?
3.) Koje sadržaje gledaš na internetu?
4.) Da li koristiš internet u edukativne svrhe? Koje? Kako?
5.) Dali ste nekada učili nastavnu jedinicu u školi koristeći računare, a da to nije čas informatike?
6.) Da li imaš neki program na svom računaru koji ti je koristan za školu?

Učenici su ispitivani individualno ili u paru. Istraživači su podsticali učenike da iznesu svoje mišljenje i da formulišu odgovore na postavljena pitanja. Audio zapisi ovog dela istraživanja analizirani su metodom analize sadržaja.

3. Uzorak

Uzorak obuhvata 20 učenika šestog i osmog razreda iz više osnovnih škola. Kriterijum za izbor učenika je njihova ekspresivnost i komunikativnost.

4. Nalazi

- Svi intervjuisani učenici imaju računar kod kuće i svakodnevno ga koriste.
- Učenici značajan broj sati u toku dana provode ispred računara. U prilog tome svedoče izjave:

„Koristim računar svaki dan! Sigurno 5-6 sati dnevno." (8.razred)

„Ako uračunamo i to što jedem pored računara onda 7-8 sati u toku dana!" (6.razred)

- Fejbuk, jutjub, sajtovi za igranje onlajn igrica su najpopularniji među osnovcima. Svi ispitivani učenici izjavili su da računare najviše upotrebljavaju za internet.

„Ja najviše koristim računar za fejs!" (8.razred)

„Igram igrice, idem na fejsbuk i jutjub!" (6.razred)

- Na pitanje o tom šta još rade na računaru, i da li koriste neke računarske programe za školu, izdvajamo jedan od karakterističnijih odgovora:

„Najviše koristim net kada tražim nešto za projekte. Ponekad koristim sajtove, vikipediju, metak. A od programa za školu jedino koristim Power Point".

Učenici ističu internet kao razlog za korišćenje računarau velikoj meri. Intresantno je da učenici provode dosta vremena na internetu, a da zapravo posećuju mali broj sajtova. Primećuje se da poznaju mali broj sajtova koje mogu da koriste u obrazovne svrhe. Najviše vremena provode na društvenim mrežama. Kada je reč o softveru koji može da se koristi u obrazovne svrhe, učenici su uglavnom iskazali nepoznavanje istih ili su pak davali kratke i šture odgovore.

- Na pitanje o tome, da li su imali neki multimedijalni čas i da li im se dopao, učenici su sa oduševljenjem odgovorili da je bilo sjajno kada su neki od nastavnika doneli računare i na njima otkucane nastavne jedinice, slike država, životinja i sl.

„Nastavnik geografije nam je pokazivao samo jednom. Mi smo svi zinuli kada nam je pokazivao ta čuda! Voleo bih da nam je više puta pokazivao!“ (6. razred)

- Učenici su iskazali pozitivan stav prema uvođenju računara u nastavni proces. U takvom načinu rada uviđaju mnogo prednosti. Takođe, pojedini učenici su svesni eventualnih poteškoća koje se mogu javiti prilikom uvođenja računara u nastavni proces.

4. Zaključak

Poslednju deceniju dvadesetog veka karakterišu značajne promene u svim sferama društva, te su se očekivale i kvalitativne promene u sferi obrazovanja. Pojedine zemlje uvidele su prednosti informacionih tehnologija koje su stvorile preduslove za sprovođenje kvalitetnije nastave. Očekuje se da će učenik biti u centaru obrazovanja i da će dobijati informacije iz različitih izvora, tempom koji odgovara njegovim sposobnostima i predznanjima, te će temeljnije i sa razumevanjem ovladati nastavnim sadtžajem.Obrazovanje informacione ere, uz korišćenje novih tehnologija podrazumeva i promene u organizaciji rada, nastavnim oblicima i metodama, kako bi se prevazišli nedostaci tradicionalne nastave, a obrazovni proces podigao na viši, kvalitetniji nivo.

MOGUĆNOSTI PRIMENE SAVREMENIH DOSTIGNUĆA OBRAZOVNE TEHNOLOGIJE U PREDŠKOLSKIM USTANOVAMA

Doc. dr Milena Bogdanović[1]
Univerzitet u Nišu, Učiteljski fakultet u Vranju

Rezime: Rad predstavlja kratak prikaz nekih osnovnih pojmova vezanih za savremenu informacionu tehnologiju. Opisane su i neke od mnogobrojnih mogućnosti njene primene u radu sa decom predškolskog uzrasta. Data su neka gledišta vezana za dilemu da li deca predškolskog uzrasta treba da koriste računare, ili ne. Ukratko su predstavljeni multimedijalni interaktvni diskovi koji mogu pomoći u postepenom uvođenju dece predškolskog uzrasta u "svet računara", kako bi ih, u daljem školovanju koristili na najbolji mogući način. Objašnjen je značaj pravilne upotrebe računara kao pomagala u savladavanju osnovnih pojmova iz matematike, jezika, umetnosti.

Ključne reči: Računar, multimedija, predškolski uzrast, internet, učenje uz računar.

POSSIBILITIES FOR MODERN ACHIEVEMENTS OF THE EDUCATIONAL TECHNOLOGY IN PRESCHOOL INSTITUTIONS

Dr Milena Bogdanović
University of Niš, Teacher Training Faculty, Vranje

Abstract: The paper presents a brief overview of some basic concepts related to modern information technology. Are described and some of the many possibilities for its application in work with children of preschool age. It is date some views on the question of whether preschool children should use computers

[1] mb2001969@beotel.net, milenab@ucfak.ni.ac.rs

or not. Briefly presents the multimedia and interactive discs that can help in the gradual introduction of preschool children in the" world of computers ", to them, in further studies, using the best possible way. It is explained the importance of proper use of computers as aids in mastering the basic concepts in mathematics, language, arts.

Keywords: computer, multimedia, pre-school age, the Internet, learning using the computer.

1. Umesto uvoda

Nastanak računara je u vezi sa vekovnom težnjom čoveka da sebi olakša proces računanja, ali i da ga ubrza i učini tačnijim. U početku su ljudi računali upoređivanjem jednog skupa objekata sa drugim skupom objekata (kamenje, drvca,...). Operacije sabiranja i oduzimanja su bile jednostavno operacije dodavanja, odnosno oduzimanja grupe objekata na gomilu ili sa gomile.

Savremena epoha podrazumeva, pored ostalog i računarsku pismenost. Danas su područja primene računara vrlo velika. Podela ne može strogo biti razgraničena zbog preplitanja primena kroz razna područja. Ipak, ova bi se podela mogla iskazati na sledeći način:

- obrada teksta,
- crtanje i obrada crteža,
- obrada slika,
- obrada zvuka,
- animacija,
- obrada video zapisa,
- komunikacije,
- baze podataka,
- multimedijalne primene,
- naučno-tehnički proračuni,
- zabava i razonoda.

Jedno od vrlo interesantnih područja primene računara jeste multimedijalna primena, o kojoj će ovde biti više reči.

Multimedija predstavlja harmoničnu celinu sastavljenu uglavnom od animacije (pokretnih slika), zvuka (muzike), grafike i teksta. Svaki od ovih delova predstavlja za sebe posebnu oblast primene računara.

Naglašena prednost multimedije se ogleda u njenoj suštini, koja nije ništa drugo do *aktivno učenje*. Svi multimedijalni programi su složeni, pa je iz tog razloga nemoguće izdvojiti ni jednu komponentu multimedijalne opreme, i nazvati je glavnom. Da bi se mogle adekvatno iskoristiti sve dobre strane multimedije, neophodna je kvalitetna računarska oprema i posedovanje kvalitetnih programa.

2. Ko koristi računar kod nas?

U Srbiji gotovo dva miliona ljudi koristi računar svakoga dana. Istraživanja pokazuju da se svake godine povećava procenat ljudi koji koriste računar i internet. To, neminovno, dovodi i do toga da je sve veći broj dece u kontaktu sa računarima. Dete ne možemo izolovati od tekovina moderne civilizacije, ali ga možemo i moramo usmeriti da na pravi način iskoristi sve prednosti novog doba.

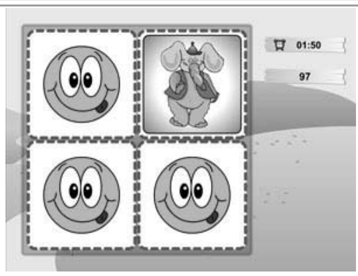
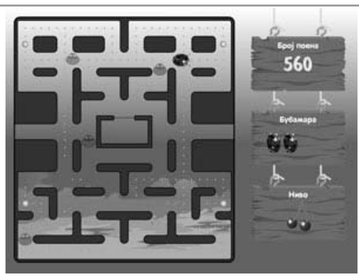
Pre rada na računaru dete svakako treba potpuno da savlada osnovne matematičko-logičke operacije i osnove pismenosti. U svom najranijem uzrastu ono treba da uči fundamentalne stvari koje za ceo život ostaju takve kakve jesu i koje se ne menjaju - sabiranje i oduzimanje osnovnih brojeva uvek ostaje takvo kakvo jeste, a isto važi i za pravopis, čija pravila ostaju dok je jezika. Međutim, kod računara nije takav slučaj, jer se operativni sistemi, programski jezici, aplikacije... menjaju svakih par godina i potrebno je stalno unapređivanje znanja. Dovoljno je samo da se setimo prelaska sa komandne linije DOS operativnog sistema na grafička okruženja poput Windows-a, što je bilo ravno softverskoj revoluciji. Treba težiti da se deci najmlađeg uzrasta računar objašnjava kao korisno pomagalo, ali tek pošto savladaju osnovne školske discipline. Računar nikako ne treba sugerisati kao zamenu za te osnovne procese. Ukoliko se već ide ka računarskoj edukaciji male dece, ne bi ih trebalo opterećivati učenjem promenljivih softverskih rešenja, već ih treba upućivati na shvatanje osnovnih i lako shvatljivih stvari iz računarskog sveta koje će ostati za duži vremenski period nepromenjene.

Deca sa druge strane ove "digitalne podele" nemaju koristi od novog edukacionog softvera i ne uče da koriste alatke koje će biti važne komponente naših života u budućnosti. Dakle, računar je alatka kao što je to knjiga, olovka ili televizija. Računari se mogu koristiti u odgovarajućim načinima razvoja korisnim za decu i kao i sve druge alatke mogu se zloupotrebiti. Postoje značajna isticanja pozitivnih efekata tehnologije na razvoj i edukaciju dece. Takva istraživanja takođe ističu da su računari pomoćni i ne zamenjuju visoko ocenjene aktivnosti i materijale u ranom detinjstvu kao što je umetnost, kocke, pesak, voda, knjige, istraživanje sa pisanjem materijala i pozorišne igre. Umesto postavljanja zabrane na računare roditelji i ostali odrasli ljudi bi trebalo da ispitaju uticaj ove tehnologije na decu i postaraju se da se računari koriste da bi deca imala korist, da razviju literarne, saznajne i socijalne veštine.

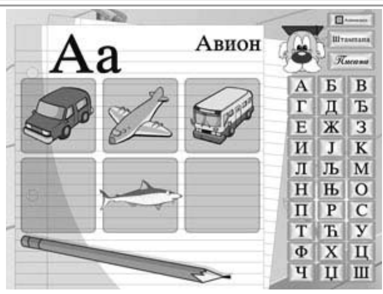
3. Deca u svetu računara

Na računaru dete može da crta, može da boji, može da uči slova i da se upozna sa osnovama matematike. Danas postoje diskovi namenjeni deci koja kroz igru mogu mnogo toga da nauče. Neki od njih su: ***Poletarac, Školica, Švrća, Azbukvar, Matematika kroz igru***…

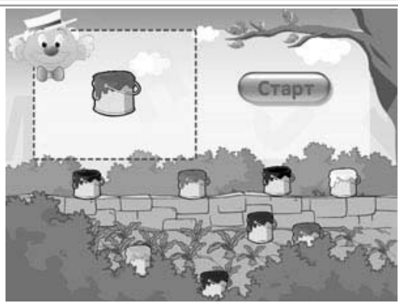
Poletarac je paket od 19 igara, zabavnog karaktera, za predškolski uzrast. To su jednostavne i odabrane igre u živopisnim bojama koje prati dinamična muzika. Ceo paket igara urađen je na srpskom jeziku ćiriličnim pismom, čime se najmlađoj deci približava računar na njima koristan i poznat način, a podsvesno podstiče osećaj za rad na računaru koji će deci koristiti u daljem obrazovanju. Neke od tih igara su:

 	Lovac na balone Nalazimo se u ulozi Robina Huda, na nama je da pogodimo što više balona.
 	Memorija Igra u kojoj trebamo pronaći dve iste karte.
 	Pakman Stara igra u malo drugačijem izdanju - u ovom slučaju upravljamo bubamarom kroz lavirint.

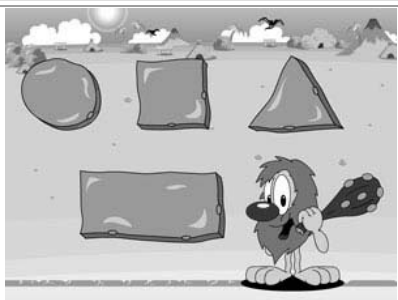
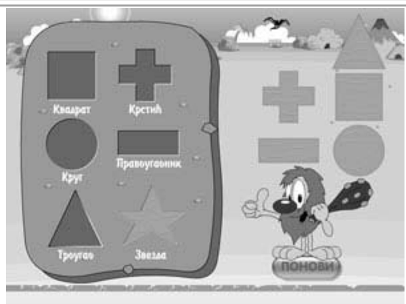
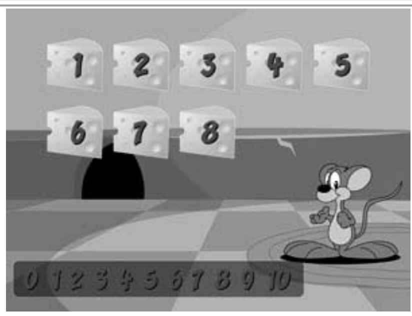
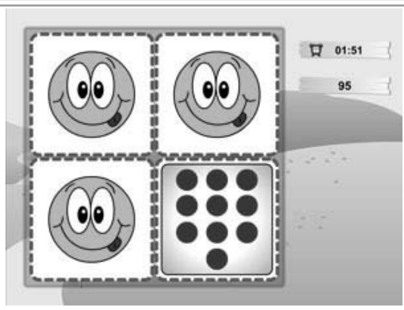
Školica je paket od 35 igara za decu do 9 godina, namenjen učenju slova, brojeva i zabavi. Sva slova i brojeve prati glasovni zvučni zapis i dete dobija zvučne instrukcije za rad. U delu za zabavu su igre namenjene i roditeljima. Svaka igra pojedinačno ciljno je namenjena za razvoj psiho-motornih i intelektualnih sposobnosti deteta kao što su: učenje slova i brojeva, brzina ramišljanja i zapažanja, pamćenje, taktičnost i kreativnost. Evo nekih igara iz ovog paketa:

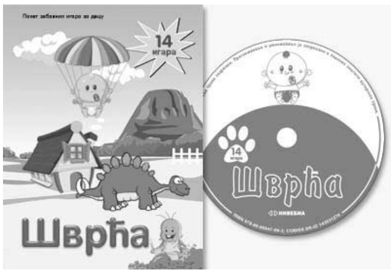
<table>
<tr><td>
</td><td>Azbuka

Na ekranu su prikazana štampana i pisana slova. Za svako izabrano slovo postoji animacija i slike koje prikazuju šta počinje na slovo koje smo izabrali, kao i prateća govorna podloga.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Lovac na slova

Vodite bebu dinosaura koja u svoju mrežicu treba da pokupi slova, kako bi napisao traženu reč. Beba dinosaur počinje igru sa tri slova, a zatim idu kompleksnije reči do osam slova.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Učimo boje

Na postavljen zadatak dete treba da izabere kanticu sa pravom bojom.</td></tr>
</table>

	**Oblici** Naučimo oblike uz pećinskog čoveka.
	**Uparite oblike** Određeni oblik treba da stavimo na pravo mesto.
	**Učimo brojeve** Igra namenjena deci predškolskog uzrasta gde na slikovit način miš broji parčiće sira.
	**Memorija sa brojanjem** Dete treba da pronađe dve iste karte, na jednoj karti piše traženi broj, a na drugoj se nalazi određeni broj tačkica, tako da dete mora da nauči da broji tačkice kako bi rešilo igru.



Švrća je paket od 14 zabavnih igara namenjen mlađim korisnicima. Zanimljiv sadržaj, bogat kolorit, dopadljiv i prijatan dizajn i vedra pozadinska muzika garantuju da će igre iz ovog paketa sasvim sigurno duže vreme držati dečiju pažnju. Tu su, pored ostalih, igre *Bojanka, Gladna gusenica, Domine, Kameleon, Lavirint, Pianino, Svet dinosaurusa, Slagalica…*

Azbukvar je napravljen na savremenom i otvorenom konceptu učenja dece uz igru, pesmu i zabavu. Prema prvoj verziji Azbukvara, televizija RTS je snimila igrani serijal za decu od 30 epizoda, po 5 minuta za svako slovo. Prevashodno, ovaj multimedijalni dečiji CD je namenjen deci od 4 do 7 godina koja tek treba da nauče da čitaju i pišu, ali on je i nešto više od toga. Deca uzrasta od 7 do 10 godina se rado igraju uz pile "Slovišu" i brojne igre i karaoke. Azbukvar je pohvaljen od strane članova Srpske akademije nauka.

Mogućnosti implementacije sadržaja multimedijalnog interaktivnog diska ***Matematika kroz igru*** u proces usvajanja početnih matematičkih pojmova su velike. Ovaj disk predstavlja paket igara namenjenih učenju matematike, preporučenih za uzrast od 3 do 10 godina.

Sam disk je okarakterisan kao skup od četiri celine, koje, opet, svaka za sebe, treba da pomognu pri usvajanju novih znanja, kao i pri proveri naučenog.

Svaka od četiri celine ima svoje podteme, pa je sadržaj diska sledeći:

1. UPOZNAVANJE SA BROJEVIMA
1) Učimo brojeve
2) Prepoznavanje brojeva
3) Memorija
4) Brojanje jabuka
5) Učimo brojanje
6) Memorija sa brojanjem
7) Klavir

2. SABIRANJE I ODUZIMANJE
1) Sabiranje za osnovce
2) Sabiranje i oduzimanje
3) Sabiranje jabuka
4) Oduzimanje zvezdica
5) Sabiranje kroz igru
6) Mala škola
7) Pismeno sabiranje

3.MNOŽENJE I DELJENJE
1) Množenje i deljenje
2) Množenje kroz igru

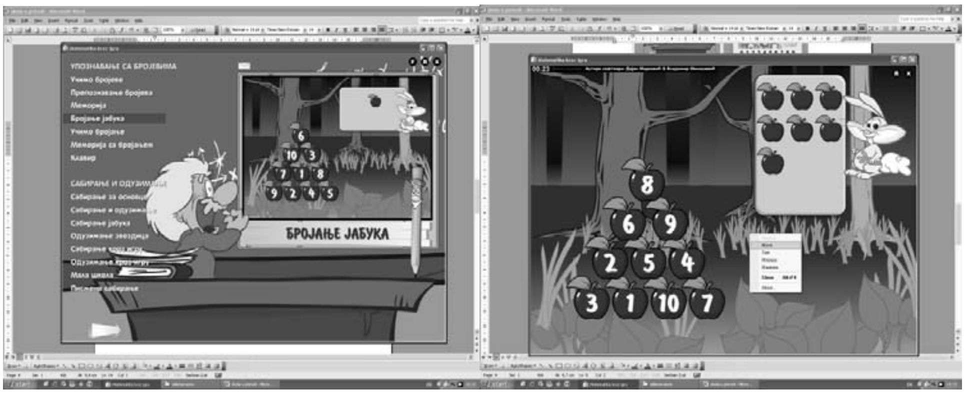
4. ŠTA SMO NAUČILI
1) Digitron
2) Matematički fliper
3) Spajanje parova
4) Osmosmerka
5) Pomozite majmunu
6) Lansiranje šatla
7) Robot
8) Učitelj matematike
9) Vežbanka

Prva celina je namenjena predškolcima, dok su ostale tri, prevashodno namenjene deci u osnovnoj školi, uzrasta od 7 do 10 godina.

U celini **Upoznavanje sa brojevima**, izabrane su teme Prepoznavanje brojeva, Brojanje jabuka, Učimo brojanje.

Pri izboru teme **Prepoznavanje brojeva**, na dobijenom ekranu treba „zaokružiti“ brojeve koji se nalaze na „čudnim“ mestima. Radi se o brojevima od 0 do 9, što se i vidi na dobijenom ekranu, a oni se nalaze svuda po crtežu, samo ih treba prepoznati. Cilj je tačnost i brzina rešavanja ovog zadatka.

Ako želimo da brzo i tačno naučimo decu da broje, onda ćemo izabrati temu **Brojanje jabuka**. Na desnoj strani ekrana dobija se određen broj jabuka, a na levoj treba izabrati jabuku sa izbrojanim brojem na levoj strani.



Za uspešno savladavanje brojanja, biramo temu **Učimo brojanje**. Cilj je da što brže i tačnije napunimo korpu odgovarajućim brojem plodova. Taj traženi broj je ispisan na korpi.

4. Na kraju…

Praktičan, interaktivan i zabavan način upotrebe računara, razvija veštine rada na računaru koje su neophodne za napredovanje i razvoj i koje doprinose razvoju dečje ličnosti. Na računaru se mogu igrati igrice i računar može služiti za zabavu, ali pored toga otvara se širok spektar mogućnosti. Računari redefinišu naš odnos sa drugima i učimo o svetu oko nas na jedan potpuno novi način. Oni su sve značajniji u našim svakodnevnim životima. Preuzimanjem odgovornosti za dečiju upotrebu računara, porodice mogu značajno smanjiti potencijalne rizike i u isto vreme dozvoliti deci pristup mnogim novim pozitivnim iskustvima.

Šta je ono što dete može dobiti primenom informacione tehnologije u vrtiću? Adekvatnom primenom informacione tehnologije, čiji vrhunac predstavlja zajedničko stvaranje vaspitača i dece različitih multimedijalnih materijala, deca će kroz igru učiti da koriste računar za sticanje i proširivanje znanja. Uz to, stvaraće se potrebne navike i usmeravati interesovanja deteta ka adekvatnim sadržajima koji se nude ovom tehnologijom. Time se deca od ranog detinjstva navikavaju da koriste „savremena učila“ uz pomoć računara. I ne samo to! Deca vrlo rano spoznaju da računari ne služe samo za igranje agresivnih ili nekih drugih igara, već i za aktivno učenje kroz igru i zabavu, što je daleko značajnije od bilo koje druge primene računara vezane za taj uzrast dece.

Savremena obrazovna tehnologija, uz korišćenje multimedijalnih sistema, stvara preduslove za angažovanje svih čula u procesu sticanja novih znanja, razvija kreativnost učenika i obezbeđuje veću aktivnost učenika u nastavi i učenju. Zato su informatika i informaciona tehnologija značajni sadržaji nastave na svim stepenima školovanja, od predškolskih ustanova do univerziteta.

LITERATURA

[1] ***M. B. Tasić, M. D. Ćirić***, *Osnovi informatike, Univerzitet u Nišu, Tehnološki fakultet u Leskovcu, 2005.*

[2] ***Dejan Marković, Vladimir Milošević***, *Matematika kroz igru, Agencija NIVEBIA, Niš, 2005.,* www.southserbia.com

[3] www.juniormedia.net

[4] www.en.wikipedia.org/wiki/Serbia

[5] www.unijasprs.org.rs/index.php?option=com_content

PROJEKAT OTVORENOG KODA – QLAB

Miloš Netković[1], Aleksandar Đenić[2], Marko Mladenović[3], Ivan Barišić[4], Nikola Milenković[5]

Apstrakt - *QLab* je projekat otvorenog koda koji predstavlja alternativu *MATLAB*-u. Ceo projekat je podeljen u šest podprojekata što čini realizaciju projekta jednostavnom jer su podprojekti nezavisni, a i postoji mogućnost vrlo lake izmene nekog dela projekta bez potrebe da se menjaju i ostali delovi. Očekuje se da će se aplikacija koristiti na numeričkim predmetima na fakultetima. Veliki broj ideja za nadogradnju i poboljšanje *QLab*-a, kao i veliki entuzijazam studenata koji rade na projektu, nagoveštavaju da bi *QLab* mogao da preuzme primat među softverima slične namene.

1. UVOD

U cilju razvoja *open source* zajednice, promocije fakulteta i pružanja prakse studentima, na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu, je pokrenut projekat otvorenog koda *QLab*. *QLab* predstavlja softver za kompleksna matematička izračunavanja, sličan *MATLAB*-u. U početku treba da podrži većinu funkcionalnosti *MATLAB*-a, a u daljem razvoju i da ih proširi. Ideja je da se koristi u akademskoj zajednici, na raznim fakultetima, koji bi ga i unapređivali u zavisnosti od svojih potreba [1].

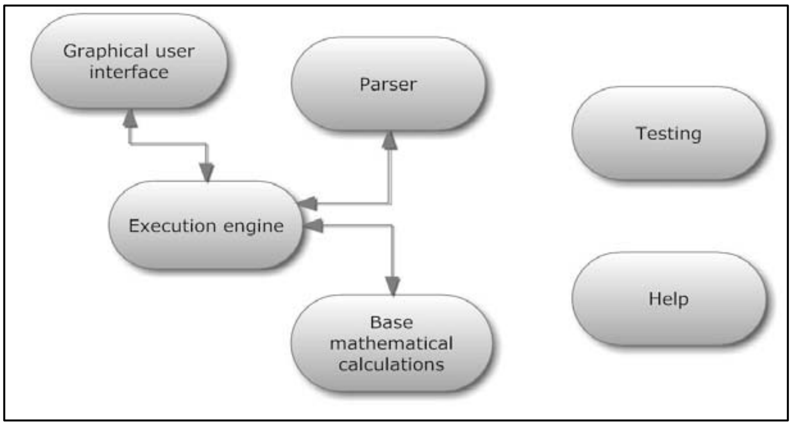
Na razvoju rade studenti u koordinaciji sa profesorima sa Matematičkog fakulteta i njihovih saradnika. Projekat je podržan od strane *Microsoft* akademske zajednice Srbije.

---

[1] Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, milos.netkovic@gmail.com
[2] Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, djenic@matf.bg.ac.rs
[3] Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, marko.mladenovic@studentpartner.com
[4] Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, ivan2029@gmail.com
[5] Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, electronik87@gmail.com

2. IMPLEMENTACIJA

QLab se razvija na *.NET* platformi (*NET Framework 4.0*), u programskom jeziku *C#*. Koristi se razvojno okruženje *Visual Studio 2010*. Implementacija *QLab*-a je podeljena na šest različitih celina. Sve celine su među sobom nezavisne i komuniciraju uz pomoć unapred dogovorenih interfejsa. Dele se na parser, jezgro, implementaciju matematičkih funkcija, grafički korisnički interfejs, pisanje uputstva za korišćenje softvera i testiranje(Slika 1). Tako je omogućena modularnost i jednostavna organizacija celog projekta. Ovakav pristup takođe omogućava da, ukoliko dođe do potrebe za unapređivanjem aplikacije, unapređenja mogu da se rade nezavisno. Tačnije, ukoliko se unapređuje samo jedan od podprojekata potrebno je menjati samo njega, poštujući standarde za komunikaciju, i ostatak aplikacije će i dalje raditi. Ovo je vrlo bitna osobina s obzirom na to da je *QLab* projekat otvorenog koda i da svako može da dodaje svoja unapređenja.

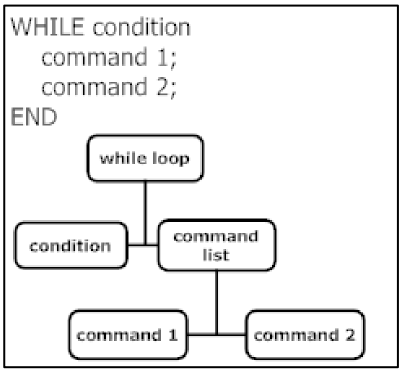


Слика 1. *Подпројекти QLab-a*

U toku rada programa korisnik definiše funkcije i skripte u grafičkom korisničkom interfejsu. U trenutku izvršavanja naredbe grafički korisnički interfejs šalje naredbu i odgovarajuće funkcije jezgru *QLab*-a. Jezgro naredbu i funkcije parsira uz pomoć parsera i računa uz pomoć matematičkih funkcija. Konačan rezultat vraća grafičkom korisničkom interfejsu koji ga prikazuje korisniku.

3. PARSER

Za parsiranje se koristi *Gardens Point Parser Generator*, razvijen na *Queensland* univerzitetu u Brizbanu, u Australiji, koji je takođe otvorenog koda. On prevodi standardne *lex/yacc* gramatike u *C#* biblioteku koja parsira tekst. Parsiran tekst se vraća u obliku sintaksnog drveta(Slika 2).



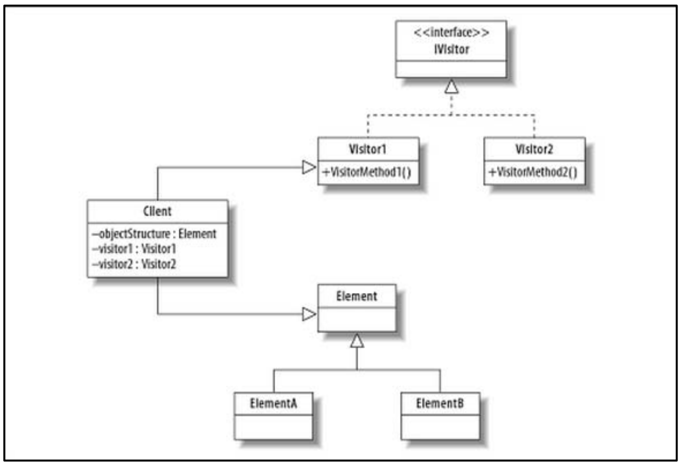
Слика 2. Primer generisanog sintaksnog stabla jednostavnog QLab pseudo koda

Sintaksno drvo koje je rezultat parsiranja je jedna od najvažnijih struktura u *QLab*-u. Parsiraju se funkcije, skripte i naredbe. Sintaksna stabla čuvaju podatke o svim parsiranim elementima i osnova su za bilo koje izračunavanje u *QLab*-u. Takođe sintaksna stabla su bitna za analizu provere rada parsera, za binarnu serializaciju funkcija, analizu napisanog programa. Samim tim potrebno je implementirati više obilazaka sintaksnog stabla, u zavisnosti od akcije koju je potrebno izvršiti.

4. JEZGRO *QLAB*-A

Zadatak jezgra predstavlja obilazak sintaksnog stabla i ažuriranje tablice simbola. Tablica simbola je dinamička struktura koja vezuje nazive promenljivih (identifikatore) sa konkretneim vrednostima. Kroz obilazak sintaksnog stabla se vrši izvršavanje *QLab* funkcija. Obilazak sintaksnog stabla je moguće implementirati tako što se u svaki čvor doda funkcionalnost obilaska (izvršavanja). Tako nastaju problemi kao što su loša struktuiranost koda i povećava se međusobna zavinost podprojekata koji bi trebalo da su potpuno nezavisni.

Najbolje rešenje za ove probleme je implementacija *Visitor pattern*-a (Slika 3) nad celim sintaksnim drvetom. Ideja je da se koristi struktura čvorova, i da svaki čvor ima metodu *Accept* koja će kao argument imati instancu *Visitor* interfejsa. *Visitor* treba da ima *Visit* metodu za svaku vrstu čvora u sintaksnom drvetu. *Accept* metoda čvora poziva *Visit* metodu svoje klase. Na taj način se implementacije *Visitor*-a izdvajaju u zasebne strukture [2].



Слика 3. *Visitor pattern UML*

Jednostavno je dodati proizvoljan broj obrada drveta. Potrebno je samo implementirati *Visitor* interfejs za svaku novu obradu. Tako je moguće jednostavno dodati na primer novi unapređeno jezgro ili novu serializaciju.

5. IMPLEMENTACIJA MATEMATIČKIH FUNKCIJA

Implementacija matematičkih funkcija je podeljena na dve zasebne celine. U jednoj se implementiraju najosnovnije matematičke operacije i operatori samog jezika, a u drugoj biblioteka matematičkih funkcija višeg nivoa.

Funkcije nižeg nivoa su implementirane u *C#* jeziku, kompajlirane u *dll* datoteku i kao takve se isporučuju sa softverom. Ovaj deo funkcija je izuzetno efikasan i optimalno napisan da bi se podigle performanse *QLab* jezika. Korišćena je *Lapack* biblioteka otvorenog koda kao osnova za linearna matematička izračunavanja.

Funkcije višeg nivoa su pomoćne funkcije pisane u *QLab*-u, koje čine standardnu biblioteku aplikacije. One se distribuiraju uz sam sistem, i omogućavaju korisniku da koristi veliki broj unapred implementiranih funkcija iz raznih oblasti. Ideja je da ovih funkcija bude što više da bi korisnici što ugodnije koristili *QLab*.

6. GRAFIČKI KORISNIČKI INTERFEJS

Za razvoj grafičkog korisničkog interfejsa se koristi *Windows Presentation Foundation* (*WPF*) tehnologija. *WPF* je grafički podsistem za prikazivanje korisničkog interfejsa u aplikacijama koje se izvršavaju na *.NET Fremework*-u. *WPF* koristi direktno *DirectX* za prikazivanje slike, umesto stare *GDI* tehnologije, obezbeđuje konzistentan model programiranja i omogućava razdvajanje korisničkog interfejsa i logike aplikacije. *WPF* je srodan *Silverlight* tehnologiji što u daljem razvoju omogućava korišćenje *QLab*-a kao veb servisa. Ceo grafički korisnički interfejs *QLab*-a je baziran na *Model view presenter pattern*-u (*MVP*) za programiranje. Iz tog razloga olakšano je testiranje aplikacije.

Komponente grafičko korisničkog interfejsa su organizovane kao u *Visual Studio 2010*-u, što se pokazalo kao najbolje rešenje. Takođe, ubačena je i *ribbon* kontrola koja se kroz *Microsoft Office* pokazala kao sjajno rešenje za navigaciju kroz program i njegove opcije.

ZAKLJUČAK

Organizacija projekta *QLab*, kroz podprojekte i modularnu strukturu, se pokazala kao odlična za realizaciju velikog projekta. Studetni su pokazali veliki entuzijazam za razvoj projekta, sticanje novog znanja i neophodne prakse za dalji razvoj karijere. *QLab* nastavlja da se unapređuje i postoje ambiciozni planovi da u jednom trenutku preuzme primat među softverima slične namene.

LITERATURA

[1] *Miroslav Marić, Aleksandar Đenić, Marko Mladenović, Razvoj „open sours“ aplikacija na univerzitetima, QLab projekat Matematičkog fakulteta u Beogradu, NAUČNO-STRUČNI SKUP INFORMATIKA 2010, „Novi trendovi u razvoju informacionih sistema“,ISSN 978-86-904491-5-6, COBISS.SR-ID 175183629, pp.36-39, 2010.*

[2] *Aleksandar Đenić, Miroslav Marić, Marko Mladenović, Srđan Božović, Miloš Netković, Implementation of visitor pattern in processing a syntax tree in QLab Project, Banja Vrućica, Etran 2011.*

RAČUNALO U NASTAVI MATEMATIKE: ZAŠTO, KADA I KAKO?

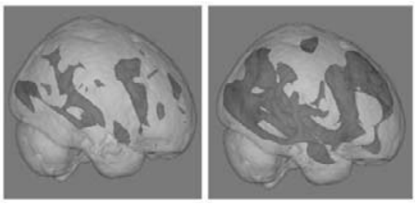
Nives Jozić[1], prof.

Zamislimo da nam danas netko ponudi na prodaju crno bijeli televizor i to po visokoj cijeni? Ili da nam netko prodaje floppy disk uređaje za spremanje podataka koje kreiramo na računalu? Zasigurno bi barem pomislili, ako ne i javno izrekli da s tom osobom nešto nije u redu!.

U sličnoj situaciji se nalazimo i kad današnje generacije učenika koje se razvijaju i odrastaju uz moderne tehnike i tehnologije 'prisiljavamo' da rješavaju dugometražne algoritamske procedure i aritmetičke izraze u čemu oni ne vide nikakvog smisla pored računala koji to rješavaju na jedan klik.

Razmislimo je li današnje generacije učenika koje odrastaju uz Internet, Instant messaging, Social networking, online gaming, mobilni telefon, iPod, iPhone, Touch screens, MP4 player, digitalne camere, GPS, … imaju iste stilove i strategije učenja kao i njihovi učitelji i nastavnici matematike koji su odrastali uz pisaći stroj, radiokazetofone i ploče, videorekordere, stereouređaje, fotokopirne strojeve, PC-eve s floppy diskovima?

Istraživanjima je potvrđeno da se tijekom života mozak reorganizira i mijenja strukturu na temelju podražaja koje prima te da različita iskustva utječu na razvoj mišljenja. Tako na primjer pretraživanje Interneta pojačava aktivnosti mozga, aktivira centre u mozgu koji su odgovorni za donošenje odluka i zaključivanje:



(ScienceDaily, Oct. 15, 2008.)

[1] Filozofski fakultet u Splitu, Odsjek za učiteljski studij, Teslina 12, 21 000 Split, HR, e-mail: nives.jozic@ffst.hr

Functional MRI brain scans show how searching the Internet dramatically engages brain neural networks (in red). The image on the left displays brain activity while reading a book; the image on the right displays activity while engaging in an Internet search. (Credit: Image courtesy of University of California - Los Angeles)

Općenito, ekspanzivnim razvojem infomacijsko-komunikacijske tehnologije, potrebne informacije su često dostupne u nekoliko minuta, što je u doba bez interneta bilo nezamislivo. Sada više nije pitanje kako doći do informacije već kako među brojnima odabrati najprikladniju te je upotrijebiti na pravilan način. Stoga se javlja sve veća potreba učenja kako učiti, a ne zapamćivanja brojnih činjenica. Prema tome, razvoj računalne tehnologije i programske podrške te infomacijsko-komunikacijskih usluga nepobitno mijenjaju pristup učenja, a uvođenjem novih tehnologija nastaju novi poslovi, koji zahtijevaju nova znanja i vještine.

No, prati li naš obrazovni sustav sve te promjene? Razvijaju li učenici i studenti u našim učionicama potrebna znanja, vještine i kompetencije za ono što će im sutra trebati u profesionalnom radu, obiteljskom i društvenom životu? Jesu li učitelji i nastavnici kao glavni nositelji obrazovnog sustava uvijek na visini svog zadatka?

U kontekstu tih promjena ovdje razmatramo razloge uvođenja računala u nastavu matematike kao nastavnog sredstva i pomagala odgovarajući na tri pitanja: ZAŠTO, KADA i KAKO.

ZAŠTO?

Primjene nastavnih sredstava i pomagala kroz povijest stalno se mijenjaju i po obliku i po namjeni. No, uvijek se teži onim sredstvima i pomagalima kojima se što bolje mogu ostvariti nastavna načela, a posebno načelo zornosti, motivacije, interesa i aktivnosti te ekonomičnosti i racionalizacije.

U tu svrhu ima smisla uvesti računalo i u nastavu matematike, a posebno namjenske programe koji takve procese mogu potaknuti, intenzivirati i razvijati. Umjesto sadržajnog učenja i razvijanja proceduralnih znanja rješavanjem dugih algoritamskih postupaka te suhoparnim ponavljanjem i uvježbavanjem sličnih zadataka, bit nastave matematike treba biti u razvoju matematičkih procesa, mišljenja i zaključivanja te usvajanja konceptualnih znanja temeljenih na razumijevanju sadržaja.

No, to pak ne znači da ako korstimo računalo u nastavi matematike više ništa nećemo konstruirati geometrijskim priborom na ploči, a učenici u bilježnici, niti da na nastavnom satu više nećmo rješavati duge aritmetičke izraze ili složene sustave jednadžbi. Naprotiv, preporuka svih pedagoških teorija je upravo u izmjenama i kombiniranju različitih metoda i oblika rada te biranju onog sredstva i pomagala koji će doprinijeti kvaliteti nastave i uspješnosti učenja. Kako je računalo dostupno većini učenika i nastavnika, a može se kvalitetno iskoristiti u različitim metodama i oblicima rada, zasigurno bi trebao biti na popisu odabira.

Na tržištu već postoje brojni obrazovni sadržaji, ali zasigurno su najvrijedniji oni koje učitelji i nastavnici sami osmisle i pripreme za određenu nastavnu temu. Tako se pomoću računala mogu pripremiti razne provjere znanja i nastavni listići za ponavljanje: razne vrste testova, kvizova, križaljki, kartica itd. Pomoću računala, prikladnih alata i programskih paketa mogu se pripremati materijali za ponavljanje i usustavljivanje nastavnih cjelina, razne motivacijske priče i historicizmi, materijali za izvođenje eksperimenta, istraživanje itd. Mogu se obrađivati podaci: statistički, tablično i grafički, bilo u svrhu nastave ili administrativnih i razredničkih poslova. U kojoj mjeri će se učitelji i nastavnici mijenjati, prilagođavati i profesionalno razvijati velikim dijelom ovisi o njima samima, ali to uvijek mora biti u svrhu uspješnog poučavanja i ostvarivanja kvalitetnih ishoda učenja.

Petogodišnje obavljanje poslova više savjetnice za matematiku na području Dalmacije u Republici Hrvatskoj omogućilo mi je direktan uvid u nastavu matematike, metode rada i stilove poučavanja učitelja i nastavnika te ishode učenja i poučavanja. Uočeno je da mnogi učitelji i nastavnici zaostaju u informacijskoj i informatičkoj pismenosti u odnosu na učenike.

S obzirom da je zadnjih nekoliko godina Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa u suradnji sa Hrvatskom akademskom i istraživačkom mrežom - CARNet provodilo informatizaciju škola čime se osiguralo da svaka škola ima informatičku učionicu, a svaki učitelj i nastavnik pristup internetu te da je u Republici Hrvatskoj stručno usavršavanje sastavni dio radnih obveza i dijelom se finacira iz Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa prirodno je upitati se zašto je nesrazmjer i dalje tako velik. Pomislili bi da je njihova starosna dob razlog, no praksa je pokazala da određeni otpor prema stručnom usavršavanju i involviranju računala u nastavnu praksu jednako pokazuju i mlađi i stariji učitelji i nastavnici matematike. I unatoč obvezatnosti stručnog usavršavanja, nažalost veliki dio njih ne prati trendove i profesionalno se ne razvija.

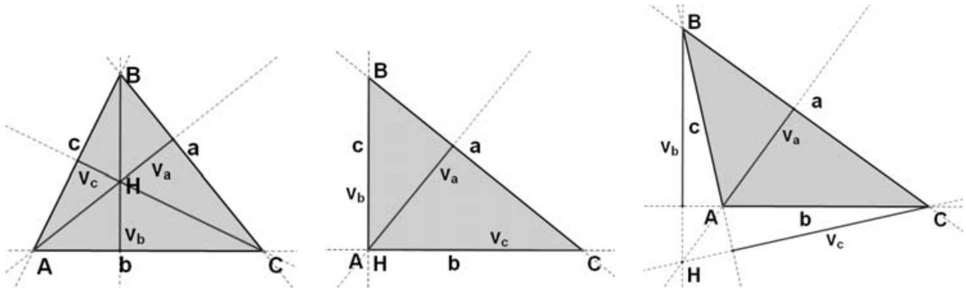
S obzirom na uočeni nesrazmjer informatičke i informacijske pismenosti učenika i njihovih učitelja planirane su i provedene stručne radionice u vremenskom trajanju od dvije godine. Radionice su bile podijeljene u tri modula, kojima su obuhvaćeni alati MS Word, MS Power Point, MS Excel, Paint i Internet pretraživači te programi dinamičke geometrije *Sketchpad* i *Geogebra*. Svaki modul je trajao 6 sati, a održavao se u informatičkoj učionici tako da je svaki sudionik direktno na računalu izvršavao postavljene zadatke. Cilj radionica je bio upoznati se s mogućnostima primjene tih alata i programa u nastavi matematike te steći određena znanja i vještine kada i kako će te resurse iskoristiti u svom odgojno-obrazovnom radu.

Tijekom dvogodišnjeg ciklusa pokazan je veliki interes za sudjelovanje u ovom načinu stručnog usavršavanja te su neke radionice i ponavljane, a iskustvo provođenja utjecalo je na kvalitetu svake sljedeće provedene radionice. Ukupno je sudjelovalo 124 od 508 (24,41%) učitelja matematike te 107 od 299 (35,79%) nastavnika matematike. Veći postotak sudionika iz srednje škole može se ipak opravdati time što u srednjim školama razmjerno radi mlađa populacija u odnosu na osnovne škole, u kojima je veliki postotak onih koji za nekoliko godina odlaze u mirovinu. Primjeri izneseni u ovom radu obrađeni su kroz spomenute radionice.

KADA?

Uporaba računala u nastavi matematike ima smisla kada štedi vrijeme, osigurava zornost, pospješuje vizualizaciju, animira statične sadržaje, dinamičnošću sadržaja omogućava izvođenje eksperimenata, informacije s Intereneta čini dostupnima u trenutku kada trebaju, uključuje učenike u pripremu i realizaciju nastavnog sata itd.

Prisjetimo se, na primjer, što sve napravimo pri uvođenju pojma visine trokuta: ukazujemo na to da trokut ima tri visine koje se mogu nalaziti unutar trokuta, preklapati s određenom stranicom ili biti izvan trokuta; da je svaki od tih slučajeva povezan s vrstom trokuta, a u svim slučajevima sve tri visine sjeku se u jednoj točki i u konačnici da je duljina visine trokuta potrebna za određivanje veličine njegove površine.



Na jednom nastavnom satu nema dovoljno vremena za crtanje i obrazlaganje svakog slučaja posebno već se obradi dio, a ostalo se prokomentira i ostavi za domaću zadaću. Ukoliko koristimo neki od programa dinamičke geometrije i unaprijed pripremimo rad kojim možemo prikazati sve slučajeve, dovoljno je samo dio sata za prikaz, a umjesto silnog crtanja vrijeme iskoristiti za raspravu i vođenje učenika do samostalnih zaključaka. Uključivanjem učenika u raspravu dodatno ih motiviramo i aktiviramo te ne serviramo gotove činjenice koje moraju zapamtiti te reproducirati pri ispitivanju već ih znalački vodimo kroz proces matematičkog mišljenja i zaključivanja.

Na uspješnost nastave matematike utječu mnogi faktori, a među njima je sigurno važan odnos učenika prema matematici, sadržaji koji se obrađuju kao i stilovi poučavanja te se u tom kontekstu mogu pronalaziti prikladni momenti u kojima ima smisla uvesti računalo u nastavu matematike.

Mnogi učenici smatraju da nisu dovoljno sposobni za učenje matematičkih sadržaja te unaprijed odustaju ulagati potrebne napore da te sadržaje razumiju i savladaju. Stoga je zadaća učitelja i nastavnika matematike, između ostalog, razvijati pozitivan odnos prema matematici i samopouzdanje u vlastite sposobnosti. Uporabom raznih motivacijskih priča i zanimljivih historicizama te audio-vizualnih efekata računala može se pobuditi interes učenika za svladavanje određenih sadržaja, a zornim prikazom pomoći njihovom razumijevanju.

Tako se, na primjer, pri uvođenju pojma potencije ili geometrijskog niza brojeva učenicima može ispričati priča o indijskom caru Šeramu i podaniku Setu koji je osmislio igru šaha te mu je za uzvrat car ponudio nagradu po njegovoj želji. Nakon što je Set od cara zatražio toliko zrna pšenice koliko bi se dobilo da se na svako sljedeće polje stavi dvostruko više zrna od prethodnog, prekrivajući sva polja, ubrzo je shvatio da mu želju ipak ne može ispuniti…. U ovom primjeru se pomoću računala može dati zorni prikaz slaganja zrna pšenice na pojedina polja šahovske ploče te u fazi prikaza otvoriti raspravu i uvesti pojam potencije s bazom 2. Zbrajanjem svih zrna pšenice postavljenih na cijelu šahovsku ploču motiviramo učenike na potrebu izračunavanja ukupnog broja zrna po nekom odgovarajućem algoritmu. Tako bi i učenici kao i car brzo ustanovili da u cijelom carstvu nema toliko pšenice za isplatu jer je ukupan broj:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=\frac{1\cdot\left(2^{64}-1\right)}{2-1}=2^{64}-1$$

ili 18 446 744 073 709 551 615

18 kvintiliona (10^{18}) 446 kvadriliona (10^{15}) 744 triliona (10^{12}) 73 biliona (10^{9}) 709 miliona (10^{6}) 551 tisuća (10^{3}) i 615 zrna pšenice.

Daljnom raspravom učenici mogu razvijati osjećaj za velike brojeve koji zapisani u obliku potencije i ne 'izgledaju' baš tako veliki. Ako zamislimo da svu tu pšenicu trebamo pohraniti u silos, pitamo se kolike bi trebale biti njegove dimenzije. Krenemo li od činjenice da se u $1\mathrm{m}^3$ može smjestiti oko 15 000 000 zrna pšenice tada bi za svu ovu količinu trebalo otprilike 1 200 000 000 000 m^3 = 1 200 km^3. To bi značilo da dimenzije silosa u obliku kvadra trebaju biti npr. širine 30 m, duljine 4 000 000 km i visine 10 m. Gdje možemo smjestiti takav silos?

Ovdje se može raspravljati i o tome kako s ovim brojevima računati na kalkulator koji dopušta unos samo 8 znamenki vidljivih na ekranu.

No, dobro je kada priča ima i svoj rasplet. Kažu da Car nije bio spretan jer se mogao izvući tako da je tražio od Seta da sam sebi odbroji zrna. Kad bi u svakoj sekundi odbrojio jedno zrno tada bi mu za 86 400 zrna trebalo jedan cijeli dan i noć, što znači da za života ne bi sve odbrojio.

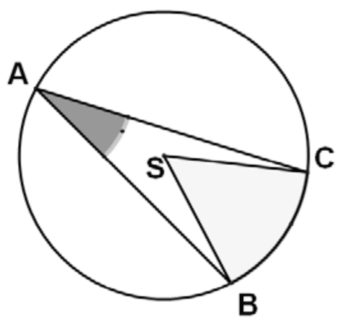
Vidimo kako jedan banalan primjer može biti temelj za otvaranje brojnih mtematičkih tema, a kada u priču uključimo i računalo sve poprima zabavno ruho te pozitivno radno ozračje.

Koristeći ovakve i slične primjere učenicima pomažemo na zanimljiv način vizualizirati matematičke sadržaje te razbiti monotoniju i dosadu kojom često opisuju nastavne sate matematike. Kada je učenicima na satu dosadno, često se niti ne upuštaju u praćenje rada, a još manje u aktivno sudjelovanje. No, ako stvorimo poticajno ozračje za rad i pomognemo im razumijeti sadržaje zasigurno će steći više samopouzdanja u svoje matematičke sposobnosti i aktivno se uključiti.

Činjenica je da **mnogi učitelji i nastavnici najčešće koriste frontalni oblik nastave** u kojem su oni glavni protagonist, a učenici samo pasivni promatrači koji slušanjem, imitranjem i ponavljanjem postupaka svoga učitelja upoznaju nove sadržaje te savladavaju postupke rješavanja. Nove generacije učenika koje se razvijaju i odrastaju uz moderne tehnologije zasigurno trebaju nove, različite metode i stilove poučavanja. Uvođenjem računala u nastavu matematike, metode rada se mogu osuvremeniti primjenom odgovarajućih sadržaja i programa te poticati rasprava, istraživački i eksperimentalni rad itd. Tome uvelike doprinose programi dinamičke geometrije.

KAKO?

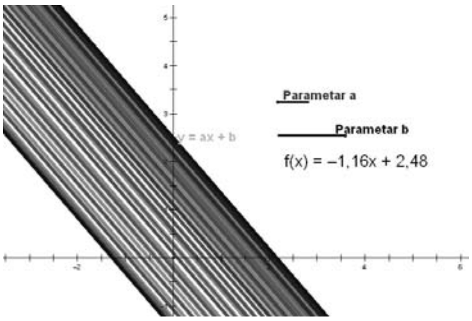
Ako obrađujemo svojstava obodnog i središnjeg kuta, primjenom programa dinamičke geometrije možemo vrlo brzo pokazati da su svi obodni kutovi nad istim lukom ili nad sukladnim lukovima iste kružnice ili sukladnih kružnica jedanke veličine. Isto tako, prije uvođenja svojstva da je središnji kut dvostruko veći od obodnog kuta nad istim lukom iste kružnice, koristeći dinamičnost programa i upisivanjem veličina u tablicu, lako se učenike može uvesti u raspravu i dovesti do samostalnog zaključka.

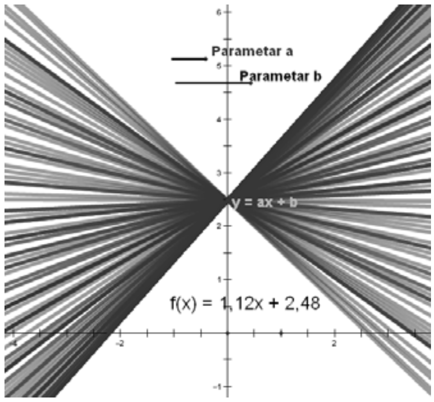


m∠BSC	m∠BAC	$\frac{m\angle BSC}{m\angle BAC}$
∠S = 125,8°	∠A = 62,9°	$\frac{\angle S}{\angle A} = 2{,}00$
∠S = 139,5°	∠A = 69,7°	$\frac{\angle S}{\angle A} = 2{,}00$
∠S = 154,3°	∠A = 77,2°	$\frac{\angle S}{\angle A} = 2{,}00$
∠S = 167,9°	∠A = 84,0°	$\frac{\angle S}{\angle A} = 2{,}00$
∠S = 55,6°	∠A = 27,8°	$\frac{\angle S}{\angle A} = 2{,}00$

Na sličan način, uvođenjem svojstva trokuta da je zbroj veličina kutova konstanta te iznosi 180°, pred očima učenika možemo brzo izvoditi eksperiment i uvjeriti ih da to vrijedi za bilo koji trokut, a zatim korištenjem svojstava translacije i rotacije izvesti strogi matematički dokaz kojim se potvrđuje da to vrijedi općenito. Kada smo tvrdnju izveli eksperimentalno i matematički dokazali, može se otvoriti i rasprava potrebe uvođenja matematičkog dokaza, a u određenim situacijama i postavljanje obrata tvrdnje i njezinog dokazivanja.

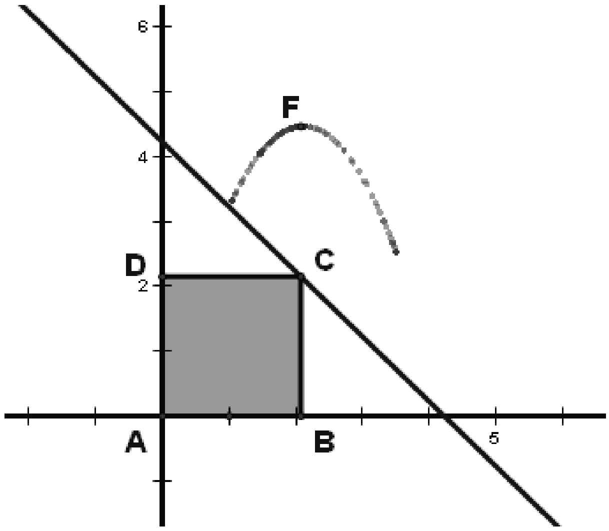
Proučavanjem različitih svojstava funkcija (linearnih, kvadratnih, logaritamskih, eksponencijalnih, trigonometrijskih…) zgodna je mogućnost ostavljanja traga pri crtanju jer se izmjenjivanjem vrijednosti pojedinih parametara funkcije lako uočavaju posljedice i izvode zaključci. Ovakvi prezentacijski efekti će zasigurno pospiješiti razumijevanje i konceptualno usvajanje određenih pojmova te time utjecati na trajnije usvanje znanja.





Pri rješavanju raznih algebarskih problema, proces razumijevanja i shvaćanja bitnosti onoga što obrađujemo može se pospiješiti vizualiziranjem algebarskog problema pomoću geometrijske interpretacije u programu dinamičke geometrije. Na primjer: pri rješavanju algebarskog problema određivanja pozitivnih brojeva x i y takvih da broj $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ bude najmanji mogući, pri čemu je $x+y=m$, možemo se poslužiti geometrijskom interpretacijom na sljedeći način:

Točke (x, y) koje zadovoljavaju uvjet $x+y=m$ čine pravac $y=-x+m$. Ako u prikaz uključimo parametar m kao promjenjivu varijablu, odmah je vidljivo kako on utječe na pravac. Ako izraz $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ preuredimo imamo: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{m}{xy}=\frac{m}{-x^2+xm}$. S obzirom da je konačni izraz razlomak, taj izraz bit će minimalan kada je nazivnik razlomka maksimalan. Ako promatramo predzadnji izraz, nazivnik xy predstavlja površinu pravokutnika, a ona je maksimalna kad pravokutnik postane kvadrat, tj. kada je $x=y$. Stoga je rješenje $x=y=\frac{m}{2}$.



Da bi taj pravokutnik bio u vezi s promatranim pravcem, vrh A smještamo u ishodištu koordinatnog sustava, a vrh C na promatrani pravac. Sada promatramo kvadratnu funkciju u nazivniku zadnjeg razlomka. Ona ovisi o koordinati x točke C. Sa slike je jasno kad imamo maksimum pa to izvedemo i algebarski: maksimum kvadratne funkcije tražimo u stacionarnoj točki u kojoj je druga derivacija manja od nule. Imamo:

$$f(x)=-x^2+xm$$

$$f'(x)=-2x+m$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -2x+m=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{m}{2}$$

$$f''(x)=-2x$$

$$f''\left(\frac{m}{2}\right)=-m$$

Kako su x i y pozitivni brojevi to je i $x+y=m>0$ te je $f''\left(\frac{m}{2}\right)<0$ što znači da promatrana kvadratna funkcija u točki $x=\frac{m}{2}$ ima maksimum. Uvrštavanjem $x=\frac{m}{2}$ u izraz $x+y=m$ dobiva se da je $y=\frac{m}{2}$. Stoga zaključujemo, promatrani izraz bit će minimalan za $x=y=\frac{m}{2}$.

Postupnim rješavanjem zadataka na ovaj način u pojedinim koracima potičemo raspravu, uvodimo učenike u konceptualno razumijevanje sadržaja te međusobno ih povezujemo i ispreplećemo itd. Radeći tako učenici neće pojedine sadržaje smještati u izolirane sandučiće već će ih međusobno povezivati u svrhu učenja novog.

Ovaj zadatak se može razmatrati i dalje tako da umjesto algebarskog problema postavimo geometrijski problem: iz skupa svih pravokutnika opsega $2m$ odredite onaj najveće površine. Time poučavamo učenike da zadatak iako na prvi pogled izgleda potpuno drugačije, na što oni znaju često komentirari – učitelj nam je dao u ispitu zadatak koji nikada do tada nismo radili, ipak uče sagledavati da je to jedan te isti zadatak samo u drugom ruhu.

Što od iznesenog iskoristiti u određenom trenutku ovisi ponajviše o uzrastu učenika i njihovom predznanju, ali i o znanju i vještinama onoga tko poučava. Najvažnije od svega je ipak KAKO to realizirati jer i od banalne priče možemo kreirati uspješan nastavni sat, a i pored pripreme kvalitetnih uradaka promašiti njegov cilj.

Zaključak

Primjena računala u nastavi matematike sama po sebi nije ni dobra ni loša, niti postoji savršeni pristup koji garantira uspješno učenje. Ali, računalo može biti vrlo korisno i nastavno sredstvo i nastavno pomagalo ako se promišljeno, vješto i ciljano koristi.

No, da bi nečemu počavali učenike prvo to sami moramo znati, da bi ih poticali na razvijanje različitih vještina prvo sami moramo u tome biti vješti, a da bi poučavali tako da nas učenici razumiju prvo to sami moramo razumijeti.

Uvođenje računala u nastavu matematike zahtjeva odvajanje dodatnog vremena te dodatnu izradu ili doradu potrebnog materijala što je zasigurno nedostatak. No, kada se jednom nešto oblikuje onda se može nadograđivati, dotjerivati i uvijek iznova koristiti, a u izradu se mogu uključiti i učenici što je dobra strana ovog nastavnog sredstva i pomagala.

ZAŠTO? Nove generacije učenika odrastaju s novim tehnikama i tehnologijama, zato ih računalom možemo motivirati i zainteresirati za matematičke sadržaje. Koristeći računalo i odgovarajuću programsku podršku možemo brzo i učinkovito povezivati različite sadržaje unutar predmeta i među predmetima, možemo postići izvrsne audio-vizualne efekte, brzo i uvjerljivo eksperimentirati, istraživati itd.

KADA? Računalo i odgovarajući programi će biti korisno nastavno sredstvo i pomagalo kada potičemo brže i kvalitetnije učenje, učenje s razumijevanjem.

KAKO? Odgovornost svakog učitelja i nastavnika matematike je da računalo u nastavu uvodi promišljeno i ciljano u svrhu uspješnog učenja. No, bez obzira na stilove primjene i poučavanja, računalo i programsku podršku treba koristiti tako da se mijenja aktivnosti učenika od pasivnog promatrača do aktivnog istraživača.

Svjesni stalnih tehnoloških i društvenih promjena, brzih izmjena novih trendova i potreba, mjenjanju se i generacije učenika pa se moramo mijenjati i mi. Konačnih, jednostavnih ni revolucionalnih rješenja nema, ali u središtu pozornosti treba biti DIJETE te mudrim vaganjem i odabirom metoda i tehnika rada poticati pozitivne promjene u savladavanju matematičkih sadržaja.

Škola bi trebala biti mjesto procesa odgajanja i obrazovanja mladih generacija za buduća vremena, a to mogu postići samo kreativni i motivirani učitelji i nastavnici koji su spremni na stalni osobni rast i razvoj i koji su senzibilizirani za potrebe djece i vremena koje dolazi.

DA LI SMO ZABORAVILI MATEMATIČKU SEKCIJU?

Petar Ogrizović[1]

Pripremajući se za izlaganje na ovogodišnjem simpozijumu, razgovarao sam sa kolegama iz nekoliko desetina osnovnih škola u Republici Srbiji. Iznenadio me je odgovor na pitanje o radu matematičke sekcije, jer, u mnogim od tih škola, takav oblik rada sa učenicima ne funkcioniše. Pregledao sam, zatim, registrator u kome čuvam dokumente sa seminara za stručno usavršavanje i zapazio da su teme na ovim okupljanjima uglavnom u vezi sa ocenjivanjem, osavremenjivanjem nastave, primenom Interneta i, što je najčešće slučaj, o radu sa talentovanim učenicima, takmičarima, nadarenima, dok se sekcija pominje veoma retko. Ne isključujući mogućnost da me pomenuti sadržaji na seminarima možda više, proverio sam u „Katalogu programa stalnog stručnog usavršavanja nastavnika, vaspitača, stručnih saradnika i direktora za školsku 2010/2011. godinu" (Zavod za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja, Beograd, 2010) i ustanovio da, od 34 programa iz oblasti matematike, reč sekcija pominje se samo u sadržaju jednog. Sa druge strane, u didaktičko-metodičkim uputstvima za primene programa matematike u školama u Srbiji (Ministarstvo prosvete i nauke), u delu koji se odnosi na dodatni rad sa učenicima, preporučuje se realizacija slobodnih matematičkih aktivnosti, organizovanih, u skladu sa mogućnostima škole, u vidu sekcije ili kluba. Pretpostavljajući da je najčešća kočnica za postojanje matematičkih sekcija upravo u ovom „u skladu sa mogućnostima škole", odlučio sam da predstavim rad sekcije u svojoj školi.

Osnovna škola „Ruđer Bošković", u kojoj radim, organizuje celodnevnu nastavu za sve učenike. Tokom prepodneva realizuju se časovi redovne nastave, a nakon ručka, u popodnevnim satima, odvijaju se dodatni, dopunski, kao i časovi individualnog rada sa učenicima i časovi učenja. Osnovna ideja ovakvog rada jeste da učenici što veći broj školskih obaveza završe tokom nastavnog dana u školi, i da se uči u školi, na redovnoj nastavi. Dva puta nedeljno, na kraju radnog dana, za učenike starijih razreda naše škole, predviđeni su termini objedinjeni pod imenom KAŠ (kreativne

---

[1] Simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Beograd, 27. i 28. maj 2011., sekcija: Matematika i informatika u obrazovanju

aktivnosti škole). U tim terminima održavaju se sve školske sekcije – sportske, umetničke, jezičke, naučne... ukupno njih dvadeset. I svake godine, od oko 150 učenika starijih razreda, njih desetak izabere upravo matematičku sekciju. Najčešće su to učenici petog i šestog razreda. Rad sekcije odvija se uvek u kabinetu matematike koji, uz normativom propisana nastavna sredstva, poseduje i elektronsku tablu sa odgovarajućim softverom, čime je omogućena vizuelizacija većine tema kojima se bavimo.

Prednost sekcije, u odnosu na druge oblike nastavnih aktivnosti, a posebno u odnosu na rad sa talentima, jeste u tome da u njenom radu mogu učestvovati svi učenici, bez obzira na sposobnosti i na rezultate koje ostvaruju u redovnoj nastavi. Štaviše, sastancima sekcije veoma često prisustvuju učenici koji nemaju peticu iz matematike, ali vole naš predmet, ili bar neke njegove delove. To su oni ljubopitljivi đaci, koji vole da istražuju, postavljaju pitanja i radije rešavaju zadatke otvorenog tipa. Činjenica da, za razliku od redovnih časova, rad u sekciji nije obavezan daje mogućnost da se oblici i sadržaji rada menjaju i prilagođavaju grupi učenika koja prisustvuje sastanku. Jedan od pokazatelja kvaliteta rada sekcije jeste mogućnost da učenici, uz podršku nastavnika koji sekciju vodi, samostalno predlažu i biraju teme kojima će se baviti na sastancima. Iskustva koja imam u dosadašnjem radu, govore u prilog tome da sloboda u izboru tema podstiče kreativnost učenika i stvara pozitivnu atmosferu na sastancima, a kao rezultati rada pojavljuju se najrazličitiji pristupi rešavanju zadataka, zanimljive računarske i poster-prezentacije, tekstovi za školski časopis, kao i mnogobrojni primeri primene matematike u svakodnevnom životu. U nastavku teksta predstaviću neke od tema koje obrađujemo na sastancima sekcije koji se održavaju pod imenom „Matematička radionica".

Magični kvadrati i druge figure. Popunjavanje magičnih kvadrata, trouglova i drugih figura je prva tema kojom započinjemo rad sekcije. U pitanju su zadaci u kojima je potrebno da učenik rasporedi brojeve u prazna polja (kvadrate, kružiće) tako da se na svakoj stranici, dijagonali i/ili u svakom redu i koloni posmatrane figure dobiju jednaki zbirovi ili proizvodi. Ovo je jedna od aktivnosti koje su primerene i učenicima mlađih razreda osnovne škole, pa je koristimo da bismo pomogli učenicima petog razreda (koji se tokom septembra na redovnim časovima bave apstraktnim pojmom skupa) da uvide vezu između onoga što su učili u prethodnim razredima sa novim gradivom koje uče.

Sudoku. Ideju da, nakon magičnih kvadrata, pređemo na japansku igru Sudoku, dali su sami učenici. Ovde je reč o rešavanju logičkih zagonetki u obliku kvadratne rešetke formata 9×9, sačinjene od 9 manjih rešetki formata 3×3. Na početku igre u nekoliko polja upisani su brojevi, a cilj je da se cela rešetka ispuni brojevima od 1 do 9, tako da u svakoj koloni, svakom redu i svakoj od manjih rešetki budu upisani svi brojevi od 1 do 9, bez ponavljanja. Ova igra je dobra za treniranje strpljenja, ali i za razvijanje logičkih sposobnosti, naročito kod mlađih učenika. Na internetu postoji veliki broj stranica i aplikacija za rešavanje ove igre, tako da na uvodnim časovima krećemo od jednostavnijih rešetki (npr. 4×4), i zatim postupno pravimo strategije za rešavanje komplikovanijih problema.

Detektivski zadaci. U zbirkama zadataka i na internetu nalazi se mnoštvo problema koji spadaju u kategoriju „detektivskih zadataka". Tipičan primer su zadaci u kojima su data imena pet osoba, njihova zanimanja i prezimena, a od učenika se očekuje da, na osnovu datih informacija, povežu ime osobe sa odgovarajućim prezimenom i zanimanjem. Ovakvi zadaci su posebno interesantni jer se mogu rešavati metodom grafova, koja nije u sadržajima redovne nastave, a prihvatljiva je i razumljiva za ovaj uzrast. Rad sekcije može se učiniti zanimljivijim i zadacima koji sadrže priče sa neočekivanim obrtom, nepoznatim krivcem, nestalim predmetima, zagonetkama za čije je rešavanje potrebno poznavanje aritmetike, algebre ili geometrije.

„Pizoliki" zadaci. Rezultati koje petnaestogodišnjaci iz Srbije ostvaruju na međunarodnom testiranju PISA (Programme for International Student Assessment) pokazuju da je oko polovine učenika nakon završene osnovne škole funkcionalno nepismeno (uspešno rešavaju samo zadatke na nultom ili prvom, od šest postojećih nivoa). Svedoci smo da su ovi, za našu zemlju, zabrinjavajući podaci doveli do izmena u Zakonu o osnovama sistema obrazovanja i vaspitanja, nastavnim programima, pa i udžbenicima. Pa ipak, zadatke u kojima se pominju „mačka i po", unutrašnja dijagonala betonske ploče i slične, teško da bismo mogli nazvati životnim. Zato je potrebno uložiti mali napor i sagledati gde se sve može primeniti gradivo matematike koje učenici obrađuju u školi. U kreiranju takvih zadataka pomažu i sami učenici, iako je rešavanje „pizolikih" zadataka (onih koji podsećaju na zadatke sa PISA testiranja), aktivnost primerenija učenicima sedmog i osmog razreda.

Istorija matematike. Imena velikih matematičara često se pominju na časovima redovne nastave. Vezujemo ih za metode koje su ovi naučnici otkrili, oznake koje su uveli, oblasti kojima su se bavili i slično. Kako na redovnim časovima nema uvek dovoljno vremena za bavljenje interesantnim detaljima iz života velikana, na sastancima sekcije može se govoriti upravo o njihovim dostignućima, zanimljivostima i anegdotama iz života. I premda proučavanje tekstova i knjiga koje se bave istorijom matematike više podseća na društvene predmete (poput istorije), ovaj vid aktivnosti na sekciji uvek nailazi na dobre reakcije.

Upotreba IKT. Kada sastanke sekcije održavamo u školskom kabinetu informatike, učenici koriste računare za pristup Internet stranicama koje sadrže različite matematičke zadatke, interaktivne matematičke sadržaji koji, uz odgovarajuće vizuelne prednosti koje Internet kao medij pruža, omogućuju drugačiji pristup učenju matematike. Bilo da je reč o radu u programu GeoGebra, upotrebi edukativnog softvera i drugih aplikacija , ovi sastanci su učenicima najzanimljiviji.

Matematička rubrika. Produkte načinjene na sastancima sekcije svake godine predstavljamo drugim učenicima, nastavnicima pa i roditeljima. Poster-prezentacije i panoi izlažu se u holu ili hodnicima škole, a tekstovi i zadaci koje osmisle ili prikupe članovi sekcije imaju posebno mesto u školskom časopisu. U svakom broju lista „Đački kutak", koji dva puta godišnje izdaje naša škola, postoje tri strane posvećene matematici. Rubrika „Slatka matematika" sadrži vesti sa takmičenja, zadatke, prikaze radova sa Smotri istraživačkih radova, priče iz istorije matematike, kao i druge zanimljivosti koje uređuju članovi matematičke sekcije. Neke od zadataka i pitanja koja prikupe, učenici postavljaju takmičarima u školskom kvizu kojim svake godine obeležavamo Dan Svetog Save, i u kome su zastupljeni svi predmeti koji se izučavaju u školi.

Misliša i Kengur. Na sastancima sekcije tokom februara i prve polovine marta, uvek se bavimo pripremama za takmičenjima koja popularizuju matematiku. U pitanju su takmičenja „Misliša", koje organizuje Matematičko društvo Arhimedes i „Kengur bez granica", koje realizuje Društvo matematičara Srbije. Zbirke zadataka sa takmičenja održanih prethodnih godina predstavljaju interesantno matematičko štivo, a obiluju zadacima koji su atipični, a samim tim i zanimljiviji učenicima. Posebnu pažnju na sastancima sekcije pridajemo rešavanju zadataka iz oblasti kombinatorike i verovatnoće, koji nisu u sadržajima redovne nastave, a prihvatljivi su za uzrast starijih osnovaca.

Prikazane su samo neke od aktivnosti matematičke sekcije koja radi u Osnovnoj školi „Ruđer Bošković". Za većinu tih aktivnosti nisu potrebna velika materijalna sredstva i ulaganja, već dobra volja i entuzijazam nastavnika matematike. Siguran sam da, ukoliko stručna veća matematičara u osnovnim školama ulože malo dodatnog napora, možemo povratiti zaboravljenu matematičku sekciju u sve škole. To će, tvrdim, kao rezultat imati kvalitetniji rad i bolje rezultate i učenika i nastavnika.

Biće mi drago da podelim i druga iskustva sa onima koji planiraju da ožive matematičke sekcije u svojim školama. Za sve sugestije, kritike, pitanja i komentare u vezi sa temom, slobodno mi se obratite na adresu petar.ogrizovic@boskovic.edu.rs.

ГЕОМЕТРИЈА И ДИНАМИКА ЕЛИПТИЧКИХ БИЛИЈАРА

Владимир Драговић[1] и Милена Радновић[2]

Математички институт САНУ, Београд

Сажетак

Понселеов поризам спада међу најлепше и најдубље резултате класичне пројективне геометрије: у њему се тврди да постојање једне затворене полигоналне линије уписане у дату конику и описане око друге дате конике, имплицира постојање бесконачне фамилије таквих полигоналних линија. Полазећи од Понселеовог поризма и његове модерне интерпретације, биће укратко приказани нови резултати повезани са елиптичким билијарима.

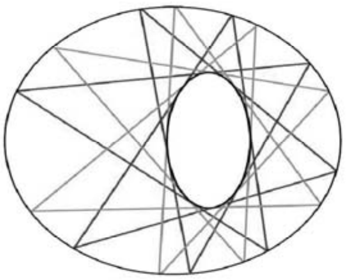
1 Понселеова теорема и Кејлијев услов

Претпоставимо да су у равни дате две конике и да конструишемо изломљену линију уписану у једну од коника, а описану око друге од њих. У општем случају, искуство нам говори да ће таква изломљена линија бити бесконачна. Међутим, уколико се таква линија затвори после коначног броја корака, тада, полазећи од било које тачке на првој коници, добићемо опет затворену линију, и то после истог броја корака. Ово тврђење, познато као *Понселеов поризам*, почетком XIX века доказао је Жан-Виктор Понселе [14], и илустровано је на Слици 1.

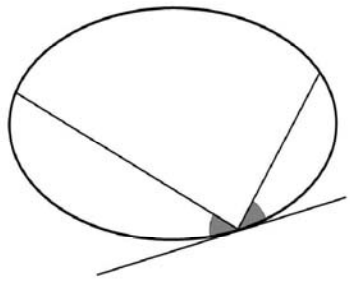
Природно питање које се поставља у вези са Понселеовим поризмом, јесте да се нађе аналитички услов којим би се проверило постојање затворене изломљене линије уписане у једну и описане око друге конике. Такав услов је средином XIX века извео Артур Кејли [2]:

Нека су у пројективној равни дате две конике својим једначинама у хомогеним координатама: $(Cx, x) = 0$ и $(\Gamma x, x) = 0$. Тада постоји затворена изломљена линија са n ивица уписана у прву конику и описана око друге

[1] vladad@mi.sanu.ac.rs
[2] milena@mi.sanu.ac.rs



Слика 1: Две осмостране затворене изломљене линије придружене двема коникама.



Слика 2: Билијарски закон.

ако и само ако:

$$C_2 = 0, \quad \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C_2 & C_3 & C_4 \\ C_3 & C_4 & C_5 \\ C_4 & C_5 & C_6 \end{vmatrix} = 0, \dots \quad \text{за } n = 3, 5, 7, \dots$$

$$C_3 = 0, \quad \begin{vmatrix} C_3 & C_4 \\ C_4 & C_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C_3 & C_4 & C_5 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_5 & C_6 & C_7 \end{vmatrix} = 0, \dots \quad \text{за } n = 4, 6, 8 \dots$$

Овде је $\sqrt{\det(C + t\Gamma)} = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots$ Тејлоров развој око тачке $t = 0$.

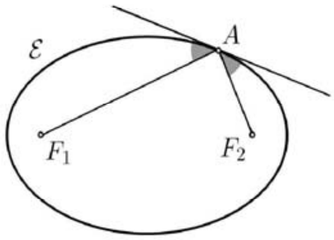
2 Билијар унутар елипсе

Понселеова теорема има лепу механичку интерпретацију.

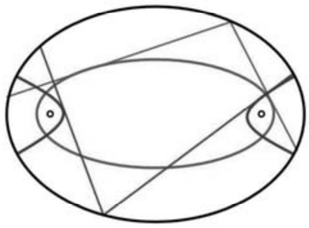
Математички билијар је динамички систем код кога се материјална тачка креће равномерно праволинијски унутар области задате неком затвореном кривом у равни, а о ивицу билијара се одбија *апсолутно еластично* и *по закону одбијања* [13]. То значи да се интензитет брзине материјалне тачке не мења после одбијања, а упадни и одбојни углови су код сваког одбијања подударни. Билијарски закон је илустрован на слици 2, за случај билијарског система унутар елипсе, којим ћемо се и ми даље бавити у овом раду.

Добро је познато *фокално својство* елиптичког билијара: ако трајекторија садржи једну жижу елипсе, тада ће следећи сегмент те трајекторије, настао одбијањем, садржати другу жижу, као што је приказано на Слици 3. Сви сегменти таквих трајекторија наизменично садрже једну и другу жижу елипсе.

Трајекторије које не садрже жиже елипсе, такође имају занимљиво својство. За сваку такву трајекторију постоји јединствена коника, конфокална



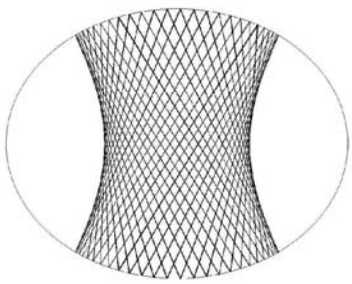
Слика 3: Фокално својство.



Слика 4: Каустике билијарских трајекторија.

са ивицом билијарског стола, тако да сваки сегмент трајекторије додирује ту конику (Слика 4). Та коника се назива *каустиком* дате трајекторије.

Пошто свака трајекторија елиптичког билијара има каустику, на њих се може применити Понслеов поризам. Другим речима, ако учимо једну периодичну трајекторију елиптичког билијара, тада је и свака друга трајекторија са истом каустиком периодична, и то се затвара после истог броја удара. Примењена на ивицу билијарског стола и каустику, Кејлијева теорема даје аналитички услов за периодичност дате билијарске трајекторије. На Слици 5, приказана је једна затворена трајекторија елиптичког билијара.



Слика 5: Периодична трајекторија билијара унутар елипсе

3 Велика Понселеова теорема

Понселе је у [14] извео тврђење општије од Понселеовог поризма.

Претпоставимо да конике Γ, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ припадају прамену $\mathcal{F}$. Ако постоји затворена изломљена линија уписана у Γ и описана око $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, тада постоји бесконачно много таквих линија.

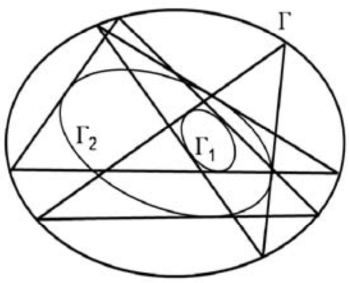
Да би се одредила таква линија, могуће је произвољно задати:

1 редослед којим њене ивице додирују $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$; нека је то: $\Gamma_1', \dots, \Gamma_n'$;

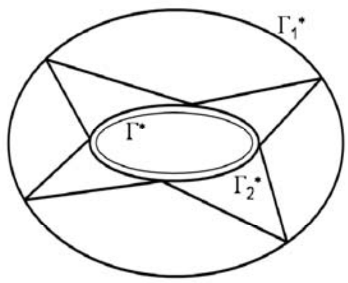
2 тангенту на Γ_1' која садржи ивицу полигоналне линије;

3 пресечну тачку те тангенте са Γ која ће припадати ивици тангентној на Γ_2'.

Велика Понселеова теорема такође има механичку интерпретацију. Пошто је дуал прамена коника фамилија конфокалних коника, Поселеове конфигурације ће у дуалној равни бити представљене билијарским трајекторијама, што је приказано на Сликама 6 и 7.



Слика 6: Изломљена линија уписана у једну конику, и описана око две друге конике прамена.



Слика 7: У дуалној равни: билијарска трајекторија са наизменичним одбијањем о две конфокалне елипсе.

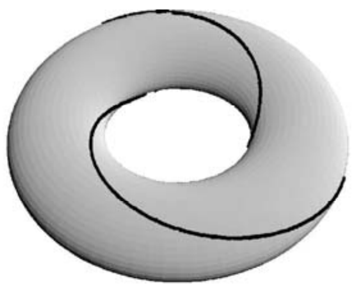
За затвореност оваквих билијарских трајекторија, где лоптица одбија о више коника из датог прамена, такође је могуће извести услове Кејлијевог типа, као што су аутори то учинили у [6].

Овде ћемо размотрити само пример приказан на Слици 7.

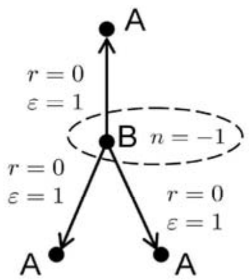
Услов за билијарску трајекторију унутар прстена између елипси Γ_1^* и Γ_2^*, са каустиком Γ^*, да се затвори после 4 одбијања о сваку од њих, је $\det X = 0$:
$X_{11} = -4B_0 + B_1\gamma + 4C_0 + 3C_1\gamma + 2C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3$, $X_{12} = -3B_0 + B_1\gamma + 3C_0 + 2C_1\gamma + C_2\gamma^2$, $X_{13} = -2B_0 + B_1\gamma + 2C_0 + C_1\gamma$, $X_{21} = -6B_0 + B_2\gamma^2 + 6C_0 + 6C_1\gamma + 4C_2\gamma^2 + 3C_3\gamma^3$, $X_{22} = -6B_0 + B_1\gamma + B_2\gamma^2 + 6C_0 + 4C_1\gamma + 3C_2\gamma^2$, $X_{23} = -5B_0 + 2B_1\gamma + B_2\gamma^2 + 5C_0 + 3C_1\gamma$, $X_{31} = -4B_0 + B_3\gamma^3 + 4C_0 + 4C_1\gamma + 4C_2\gamma^2 + 3C_3\gamma^3$, $X_{32} = -4B_0 + B_2\gamma^2 + B_3\gamma^3 + 4C_0 + 4C_1\gamma + 3C_2\gamma^2$, $X_{33} = -4B_0 + B_1\gamma + B_2\gamma^2 + B_3\gamma^3 + 4C_0 + 3C_1\gamma$,
при чему су једначине коника Γ, Γ_1, Γ_2 у хомогеним координатама редом $(Cx, x) = 0$, $(\Gamma x, x) = 0$, $((C + \gamma\Gamma)x, x) = 0$, и $\sqrt{D(t)} = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots$, $\sqrt{D(t)} = B_0 + B_1(t-\gamma) + B_2(t-\gamma)^2 + \dots$, $D = \det(C + x\Gamma)$.

4 Тополошки опис билијара унутар елипсе

Примењујући Фоменкове графове [1], као средство за тополошки опис интеграбилних динамичких система са два степена слободе, аутори су конструисали одговарајуће графове за разне врсте интеграбилних билијара са два степена слободе [9, 10]. На Слици 8 приказана је изоенергијска многострукост билијара унутар елипсе: то је пун торус са одређеним лепљењем извршеним на његовом рубу, и то тако да су индентификовани парови тачака симетрични у односу на два издвојена цикла. На Слици 9, приказан је Фоменков граф који одговара тој многострукости.



Слика 8: Изоенергијска многострукост билијара унутар елипсе.



Слика 9: Одговарајући Фоменков граф.

5 О осталим уопштењима

Аутори су разматрали вишедимензионална уопштења Понселеовог поризма, и извели одговарајуће услове Кејлијевог типа у [4, 5, 6], аналитички опис периодичних трајекторија елиптичких билијара у простору Лобачевског дат је у [3]. Разна геометријска и алгебро-геометријска својства, повезана са праменовима квадрика и Јакобијанима одговарајућих хипереліптичких кривих, изведена су у [7, 8]. Комплетан преглед досадашњих резултата у овој тематици може се наћи у [11, 12].

Напомена

Овај чланак је написан у оквиру рада на Пројекту број 174020 *Геометрија и топологија многострукости, класична механика и интеграбилни динамички системи* Министарства просвете и науке Републике Србије. М. Р. је захвална Међународном центру за теоријску физику *Абдус Салам* (Трст), у коме је боравила за време припреме чланка.

Библиографија

[1] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, Chapman and Hall/CRC, Boca Roton, Florida, 2004.

[2] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine **7** (1854), 339–345.

[3] V. Dragović, B. Jovanović, M. Radnović, *On elliptical billiards in the Lobachevsky space and associated geodesic hierarchies*, J. Geom. Phys. **47** (2003), no. 2-3, 221–234.

[4] V. Dragović, M. Radnović, *Conditions of Cayley's type for ellipsoidal billiard*, J. Math. Phys. **39** (1998), no. 1, 355–362.

[5] V. Dragović, M. Radnović, *Conditions of Cayley's type for ellipsoidal billiard*, J. Math. Phys. **39** (1998), no. 11, 5866–5869.

[6] V. Dragović, M. Radnović, *Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbf{R}^d$*, J. of Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 1269–1276.

[7] V. Dragović, M. Radnović, *Geometry of integrable billiards and pencils of quadrics*, Journal Math. Pures Appl. **85** (2006), 758–790.

[8] V. Dragović, M. Radnović, *Hyperelliptic Jacobians as Billiard Algebra of Pencils of Quadrics: Beyond Poncelet Porisms*, Adv. Math. **219** (2008), no. 5, 1577–1607.

[9] V. Dragović, M. Radnović, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regular and Chaotic Dynamics **14** (2009), no. 4-5, 479–494.

[10] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды и квадрики*, Успехи математических наук **65** (2010), вып. 2(392), 133–194.

[11] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризми Понселе*, R & C Dynamics, Москва-Ижевск, 2010.

[12] V. Dragović, M. Radnović, *Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics*, Frontiers in Mathematics, Springer-Birkhäuser, 2011.

[13] В. В. Козлов, Д. Трещев *Бильярды*, Издательство МГУ, 1991.

[14] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Mett, Paris, 1822.

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

У БЕОГРАДУ

1873