

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЊИГА АПСТРАКТА

THE BOOK OF ABSTRACTS
XIII SYMPOSIUM "MATHEMATICS AND APPLICATIONS"
1st and 2nd December, 2023.
Belgrade, Serbia

XIII СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
1. и 2. децембар 2023.
Београд, Србија



КЊИГА АПСТРАКАТА – XIII СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
1. и 2. децембар 2023.
Београд, Србија

Издавач:
Универзитет у Београду
Математички факултет

За издавача:
проф. др Зоран Ракић, декан

Главни и одговорни уредник:
доц. др Миљан Кнежевић

Уредник:
доц. др Александра Делић

Припрема за штампу:
доц. др Миљан Кнежевић
доц. др Александра Делић
доц. др Марек Светлик
доц. др Ђорђе Стакић

Корице:
доц. др Миљан Кнежевић

Штампа:
Донат Граф

Тираж:
100 примерака

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-7(048)
371.3::51(048)

СИМПОЗИЈУМ ”Математика и примене” (13 ; 2023 ; Београд)

Књига апстраката/ XIII симпозијум ”Математика и примене”, 1. и 2. децембар 2023., Београд = The book of abstracts / XIII Symposium ”Mathematics and Applications”, 1st and 2nd December 2023.; [главни и одговорни уредник Миљан Кнежевић]. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2023 (Београд : Донат Граф). - 93стр.: 30 cm

Текст на срп. и енгл. језику. - Текст ћир. и лат. Тираж 100. - Библиографија уз већину апстраката.

ISBN 978-86-7589-185-7

а) Математика – Апстракти б) Математика – Настава – Апстракти

COBISS.SR-ID 131428105

Програмски одбор XIII Симпозијума „Математика и примене”

- **проф. др Градимир Миловановић**,
академик САНУ,
- **проф. др Миодраг Матељевић**,
академик САНУ, председник одбора,
- **проф. др Бранислав Боричић**,
проректор Универзитета у Београду, редовни професор Економског факултета,
- **проф. др Зоран Ракић**,
редовни професор и декан Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Мирослав Марић**,
редовни професор Математичког факултета, председник Друштва математичара Србије,
- **проф. др Зорица Станимировић**,
редовни професор Математичког факултета,
- **проф. др Небојша Икодиновић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду.

Организациони одбор XIII Симпозијума „Математика и примене”

- **доц. др Миљан Кнежевић**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, председник одбора,
- **проф. др Зорица Станимировић**,
редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Бојана Милошевић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **проф. др Драгана Илић**,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Александра Делић**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Марек Светлик**,
доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
- **доц. др Ђорђе Стакић**,
доцент Економског факултета Универзитета у Београду.

САДРЖАЈ

Atif Avdović, Ersin Gilić, Zoran Vidović Metodički pristupi interpretacije p-vrednosti statističkih testova	9
Danijel Aleksić U-statistics-based approach for testing the MCAR assumption	10
Војислав Андрић Онлајн додатна настава математике	11
Miloš Arsenović, Ivana Savković Bounded and Compact Toeplitz operators on Harmonic Mixed-Norm Spaces	12
Damir Vajrić, Irma Ibrišimović, Julija Šehanović, Alma Šehanović, Valentina Banović Klisara Photomath i ChatGPT – primjeri netačnih rješenja	13
Владимир Балтић Полиноми у основној и средњој школи – методички приступ	14
Милан Банковић, Весна Маринковић Аутоматско решавање конструктивних проблема у геометрији	15
Борђе Баралић, Владимир Божовић, Никола Радојичић Папусови и Штајнерови ланци са заједничким кругом	16
Nives Varanović, Jasmina Milinković The role of open-ended tasks in learning and teaching mathematics	17
Радослав Божић Проблеми површине и запремине у Геогebra окружењу	18
Victor Buchstaber, Andrei Vesnin Cyclically presented groups and n-valued groups	19
Лазар Васовић Статистичка анализа расподеле повезаности и неуређености протеина у мрежама протеинских интеракција вируса <i>SARS-CoV-2</i>	20
Илија Врећца An introduction to sumsets	21
Дејан Вурдеља Дељивост бројем 7 и један „тежак разломак”	21
Radoslav Galić, Elvir Čajić, Zvezdan Stojanović, Dario Galić Stohastičke metode u veštačkoj inteligenciji	22
Jelena Gajić Schwarz-Pick lemma for (α, β) -harmonic functions in the unit disc	23
Teodora Gavrilović, Maja Anđić, Katarina Ilić, Olivera Đokić Analysis of the textbook for 2nd grade of primary school by <i>Zavod za udžbenike</i> according to the structural blocks of TIMSS research	24

Anton Gjokaј Hölder and Lipschitz continuity of quasiconformal harmonic mappings in space	25
Nicolás Guerra-Varas, Andjelka Kovačević, Dragana Ilić, Luka Popović, Angela Bongiorno, Enrico Piconcelli, Francesco Tombesi, Nicole Nesvadba Dimensionality Reduction of Broad Absorption Line Quasar Spectra	26
Александра Даниловић Математика у итвининг пројектима	27
Aurello Deandra Sonification: how to present astronomical data and images with sounds	28
Luigi D’Onofrio On BV homeomorphisms	29
Oleksandr Dovhopiatyi, Evgeny Sevost’yanov On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization	30
Драган Ђокић Закон троструког реципроцитета за твистован други момент Дирихлеових L -функција над рационалним функцијским пољима	31
Maša Đorić, Jelena Katić, Vojana Lasković On polynomial entropy of induced maps on symmetric products	32
Sonja Đukić Popović, Stefan Popović The influence of the application of teaching aids in mathematics teaching on learning outcomes	33
Józef Zajac Harmonic mappings in technical designs	33
Емир Зогић, Диана Долићанин Ђекић, Един Глогић Примена теорије графова у решавању логичко-комбинаторних задатака	34
Dragana Ilić, Andjelka B. Kovačević, Luka Č. Popović, Maša Lakićević Bringing new dimensions to active galactic nuclei (AGN) studies with the Legacy Survey of Space and Time (LSST)	35
Vladimir Janković Rešavanje problema p-rezervnog centra pomoću genetskog algoritma	36
David Kalaj Contraction property of certain classes of log-M-subharmonic functions in the unit ball	37
Mirjana Katić Međunarodno takmičenje Stemco (država organizator Singapur)	37
Kristina Kostić, Tamara Koledin, Zoran Stanić GraphEbra - interaktivna, korisnički orijentisana, veb aplikacija za rad sa grafovima	38
Adel Khalfallah, Miodrag Mateljević Norm estimates of the first partial derivatives of generalized harmonic functions	39

Ivan Limonchenko	
Polyhedral products: new results, problems, and applications	40
Катарина Лукић	
О постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе	41
Žikica Lukić, Bojana Milošević	
On Recent Developments in Change Point Analysis using Integral Transforms	42
Милена Марић, Маја Костадиновић	
Методологија састављања контролних задатака у настави математике кроз примере	43
Marijan Marković	
Hardy and Littlewood theorem in a general setting	44
Petar Marković	
The Constraint Satisfaction Problem Dichotomy Conjecture: History, Proofs and Generalizations . .	45
Miodrag Mateljević	
Hyperbolic, Euclidean, Minkowski geometry and theory of special relativity	45
Miodrag Mateljević, Nikola Mutavdžić, Adel Khalfallah	
Lipschitz Continuity for Harmonic Functions and Solutions of the $\bar{\alpha}$ -Poisson Equation	46
Miodrag Mateljević, Marek Svetlik, Miljan Knežević	
Površina i zapremina - neki interesantni fenomeni	47
Бојана Матић	
Примене Јенсенове неједнакости у тригонометрији	47
Кристина Матовић, Бојана Милошевић	
Примена диференцијалне приватности на агрегиране временске серије	48
Nevena Mijažlović, Milojica Jaćimović	
Strong convergence theorems for general quasi-variational inequalities using high-order approximation methods	49
Александар Миленковић, Немања Момчиловић	
Међупредметно повезивање наставних садржаја из математике и физике у раду са ученицима са посебним способностима за математику	50
Matej Milićević, Marko Radovanović	
On self-maps of complex flag manifolds	51
Gradimir V. Milovanović	
Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane, Part II: Orthogonal Laurent-Gegenbauer systems	52
Stanislav Milošević	
Numerical simulations: application in galactic dynamics	52
Veljko Milutinović	
DataFlow SuperComputing for BigData DeepAnalytics	53

Tatjana Mirković, Tatjana Bajić Diferencne jednačine kao jedna klasa dinamičkih jednačina	54
Stefan Mirchevski, Verica Bakeva Characteristics of the cost function for a class of single-server queueing systems with k phases of customer service	55
Milica Mirić, Tatjana Stanković, Edin Liđan Application of mathematics in the study of speed in physics processes and the path to constructivist learning	56
Andrea Seppi On the (non-)uniqueness of minimal surfaces in hyperbolic three-space	56
Miloš Mićović, Željana Torlak, Nataša Ćirović Metode konjugovanih gradijenata sa primenama	57
Aliza Mustafa, Marina Migliaccio, Alessandro Carones, Bojan Arbutina, Marko Stalevski, Simon Prunet Cleaning CMB for Precision Cosmology	58
Miodrag J. Mihaljević, Nevena Mijajlović An Optimization Approach for Certain Public Blockchain Pool Mining Scenario	59
Marina S. Pavlović, Anđelka Kovačević, Dragana Ilić, Iva Čvorović Hajdinjak, Luka Č Popović, Saša Simić Harnessing Deep Learning for Quasar Light Curve Modeling with QNPpy	60
Michael Pandazis Non-ergodicity of the geodesic flow on Cantor tree surfaces	61
Miloš Z. Petrović Problem određivanja krivine proizvoljne bilinearne forme na diferencijabilnoj mnogostrukosti	61
Marko Pešović, Zoran Pucanović With the Chebyshev polynomials through geometric circulant matrices	62
Biljana Radičić O normama k -cirkularnih matrica sa Lukasovim brojevima	63
Aman Nadimpalli Raju, Anđelka Kovačević, Francesco Tombesi, Dragana Ilić, Luka Č. Popović, Eric Slezak A Deep Learning Approach for Understanding Quasar Light Curves in the Legacy Survey of Space and Time	64
Marco Immanuel Rivera, Anđelka Kovačević, Dragana Ilić Statistical inference of Quasar variability using dynesty	65
Ivan Ristović Rana inicijalizacija konteksta Java virtuelne mašine	66
Ivana Savković Vanishing Carleson measures for weighted harmonic mixed-norm spaces	67

Марко Спасић, Милена Вујошевић Јаничић Смањивање величине извршиве датотеке компресијом кода	68
Zorica Stanimirović, Olivera Stančić Metoda promenljivih okolina za rešavanje jedne varijante problema p -hab maksimalnog pokrivanja	69
Tatjana Stanković, Bojana Ćendić Značaj i mogućnosti Chat GPT-a u procesu učenja	70
Bojana Todić, Jelena Jocković Coupon collector problem with universal coupon - properties and some bounds	71
Jovana Tomić Osnovna metoda promenljivih okolina u ulozi rešavanja problema konkurentnosti na tržištu	72
Вељко Ђировић Комбинаторика у програмима редовне и додатне наставе математике у школама у Републици Србији	73
Beata Falda Algebraic features of the means classification	74
Konstantinos Fokianos Auto-Distance Covariance Function for Time Series Analysis	74
Stanislav Harizanov, Peter Boyvalenkov The Bulgarian experience in international mathematical competitions	75
Marija Cuparić, Bruno Ebner, Bojana Milošević Independence tests for circular data	76
Elvir Čajić, Violeta Nikodinović Poissonove formule za domene u \mathbb{R}^n i granično ponašanje u matematičkoj analizi te simulacija numeričkog rješenja putem Pythona	77
Elvir Čajić, Sead Rešić Uloga matematičkog modela u simulacijskom prelazu sa 5g na 6g mrežu	78
Милан Чугуровић, Иван Ристовић, Страхиња Станојевић, Марко Спасић, Весна Маринковић, Милена Вујошевић Јаничић Компаративна анализа алгоритама обиласка графова контроле тока програма	79
Dragomir Šarić A parametrization of finite area holomorphic quadratic differentials on infinite Riemann surfaces	80
Aleksandar Šebeković, Enes Kačapor Nejednakosti u geometriji	81

Metodički pristupi interpretacije p-vrednosti statističkih testova

Atif Avdović

Departman za prirodno-matematičke nauke, Državni univerzitet u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9, 36300 Novi Pazar, Srbija
e-mail: aavdovic@np.ac.rs

Ersin Gilić

Departman za prirodno-matematičke nauke, Državni univerzitet u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9, 36300 Novi Pazar, Srbija
e-mail: egilic@np.ac.rs

Zoran Vidović

Fakultet za obrazovanje učitelja i vaspitača, Univerzitet u Beogradu, Kraljice Natalije 43, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: zoran.vidovic@uf.bg.ac.rs

Apstrakt. P-vrednosti predstavljaju jednu od osnova pri statističkom zaključivanju hipoteza nastalih kao finalni proizvod statističkih testova. Međutim, veoma često u praksi se pronalaze pogrešne ili nepotpune interpretacije koje proizilaze iz nekritičkog sagledavanja i razumevanja finalnih rezultata ovih testova. Ovo je naročito uočljivo u društvenim naukama, videti npr. [2] . Posledice mogu biti takve da se celokupno istraživanje može dovesti u pitanje po različitim osnovama. Stoga, uočljiva je potreba za detaljnijim i sveobuhvatnim pristupom rada sa p-vrednostima. U prilog ovome može se primetiti da se povećava broj časopisa koji predlažu metodološke smernice pri radu sa ovom vrstom problema, videti npr. [1], [2] i [3]. Prateći istu ideju, predstavimo različite pristupe koji mogu doprineti sveobuhvatnom razumevanju i adekvatnoj interpretaciji p-vrednosti statističkih testova.

Ključne reči: p-vrednost; značajnost; kritična oblast; metodika; interpretacija.

Bibliografija

- [1] **Z. Rafi, S. Greenland** Semantic and cognitive tools to aid statistical science: replace confidence and significance by compatibility and surprise. *BMC Medical Research Methodology*, 2020, 20(1):244. <https://doi.org/10.1186/s12874-020-01105-9>
- [2] **B. Vidgen, T. Yasserli** P-Values: Misunderstood and Misused. *Frontiers in Physics*, 2016, 4:6. <http://dx.doi.org/10.3389/fphy.2016.00006>
- [3] **M. Minić, Z. Vidović** Najčešće statističke greške u istraživanjima. *VI Simpozijum Matematika i primene*, Beograd, 2015, 77-83.

U-statistics-based approach for testing the MCAR assumption

Danijel Aleksić

University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Faculty of Mathematics
e-mail: danijel.aleksic@fon.bg.ac.rs

Abstract. We present a novel test for assessing whether data follow a pattern of being missing completely at random that was introduced in [1]. The test's asymptotic properties are derived using the theory of non-degenerate U -statistics. Notably, the novel test statistic aligns with the well-known Little's statistic when applied to multivariate data with univariate nonresponse. An extensive simulation study evaluates the test's performance in terms of maintaining type I error rates and statistical power across various scenarios, including different underlying distributions, data dimensions, sample sizes, and alternatives. Little's MCAR test serves as a benchmark for comparison, revealing that the novel test consistently outperforms it in preserving type I error rates and exhibiting higher empirical power across all studied alternatives.

Keywords: missing data, novel test, covariance, asymptotic distribution.

References

- [1] **D. Aleksić.** A Novel Test of Missing Completely at Random: U -statistics-based Approach. *arXiv:2310.19189v1*, 2023.
- [2] **D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević.** Non-degenerate U -statistics for data missing completely at random with application to testing independence. *Stat* (accepted for publication, DOI:10.1002/sta4.634), 2023.
- [3] **M. Cuparić, B. Milošević.** IPCW approach for testing independence. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2023.
- [4] **R. J. A. Little.** A Test of Missing Completely at Random for Multivariate Data with Missing Values. *Journal of the American Statistical Association*, 1988.
- [5] **R. J. A. Little, D. B. Rubin.** Statistical Analysis with Missing Data. *John Wiley & Sons*, 1987.
- [6] **M. S. Santos, R. C. Pereira, A. F. Costa, J. P. Soares, J. Santos, P. H. Abreu.** Generating synthetic missing data: A review by missing mechanism. *IEEE Access*, 2019.
- [7] **P. Mozharovskyi, J. Josse, F. Husson.** Nonparametric imputation by data depth. *Journal of the American Statistical Association*, 2020.
- [8] **W. Hoeffding.** A Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1948.
- [9] **V. S. Korolyk, Y. V. Borovskich.** Theory of U-Statistics. *Springer Dordrecht*, 2010.

Онлајн додатна настава математике

Војислав Андрић

*Математички клуб „Диофант“ Ваљево
e-mail: voja.andric@gmail.com*

Апстракт. Учење на даљину није изум нужности проистеклих из пандемије 2020 - 2022, јер разни облици учења путем посредне размене информација на релацији учитељ - ученик датирају још од 18. века. У овом веку учење на даљину добија пун замах захваљујући могућностима које пружа савремена интернет комуникација и технологија. Неки аутори за масовни почетак онлајн наставе сматрају 2005. годину када се у САД, скоро 3,2 милиона студената одабрало макар један онлајн курс на универзитету. У Србији неки елементи наставе на даљину датирају још из 1996. године када се у реализацији семинара географије у Истраживачкој станици Петница коришћени онлајн уџбеници.

Јавност у Србији се у периоду 2020 - 2022. значајно поделила у вези са реализацијом онлајн редовне наставе скоро свих наставних предмета у нашим основним и средњим школама и на универзитетима, при чему је, чини се, већинско изјашњавање јавности било (у неким случајевима до нивоа фрустрираности) окренуто против онлајн наставе. Циљ овог саопштења је да прикаже нека несумњиво, позитивна искуства у реализацији онлајн додатне наставе математике. Излагање ће бити илустровано на примерима летњих и зимских школа младих математичара које је реализовало Друштво математичара Србије у периоду 2020 - 2023, из праксе неколико континуираних годишњих школа за младе математичаре и још неких корисних математичких активности (међународна такмичења, ревијална такмичења, семинари ...) које су се одвијале онлајн путем. Посебна пажња у излагању биће посвећена питањима мотивације ученика и интерактивности ученик - наставник и ученик - ученик, која су важна питања сваке наставе.

Кључне речи: Онлајн настава; настава на даљину; додатна настава.

Bounded and Compact Toeplitz operators on Harmonic Mixed-Norm Spaces

Miloš Arsenović

*Department of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia
e-mail: milos.arsenovic@matf.bg.ac.rs*

Ivana Savković

*Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Bosnia and Herzegovina
e-mail: ivana.savkovic@mf.unibl.org*

Abstract.

We obtain criteria for boundedness and compactness of Toeplitz operators on weighted mixed norm spaces $B_{\alpha}^{p,q}(\Omega)$. In the proofs we use characterizations of Carleson measures and vanishing Carleson measures for such function spaces.

References

- [1] **M. Arsenović and I. Savkovic**, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, *Annals of Functional Analysis* **13** (70) (2022) DOI: <https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1>
- [2] **M. Bourass and I. Marrich**, Littlewood-Paley estimates with applications to Toeplitz and integration operators on weighted Bergman spaces, *Banach Journal of Mathematical Analysis* **17** 10 (2023).
- [3] **R. Chartrand**, Toeplitz operators on Dirichle-type spaces, *Journal of Operator Theory* **48** (1) (2002), 3-13
- [4] **B. R. Choe, Y. J. Lee, and K. Na**, Toeplitz operators on harmonic Bergman space, *Nagoya Mathematical Journal* **174** (2004), 165–186. Zbl 1067.47039, DOI <https://doi.org/10.1017/S0027763000008837>

Photomath i ChatGPT – primjeri netačnih rješenja

Damir Bajrić

*Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla
e-mail: bajric.damir@gmail.com*

Irma Ibrišimović

*Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet
e-mail: irma.zenunovic@gmail.com*

Julija Šehanović

*Univerzitet u Beogradu, AGRIF
e-mail: julijascekic997@gmail.com*

Alma Šehanović

*Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla
e-mail: alma.sehanovic@gmail.com*

Valentina Banović Klisara

*Osnovna škola "Vuk Karadžić" Novi Grad
e-mail: banovicvalentina@yahoo.com*

Apstrakt. Posljednjih nekoliko godina, sa globalnim širenjem društvenih mreža i platformi za komunikaciju te dostupnosti različitih sadržaja, istaknuta su pitanja i konstatacije od učenika i studenata na račun nastave, potrebe za učenjem i savladavanjem određenog nastavnog sadržaja, dostupnosti različitih IT pomagala za rješavanje određenih zadataka i problema. Iskazuju svoju nezainteresovanost za sudjelovanje u nastavnom procesu jer ne vide svrhu obrazovanja s obzirom na to da postoje alati i vještačka inteligencija koji bi bili u mogućnosti uspješno rješavati zadatke i probleme. U ovom radu smo za potrebe demonstriranja neuspješnog ili netačnog rješavanja matematičkih zadataka iskoristili, među učenicima i studentima najčešće korištenu, mobilnu aplikaciju Photomath a za predstavnika vještačke inteligencije smo iskoristili ChatGPT. Kroz primjere netačno rješених или "lošeg pokušaja" rješavanja zadataka od strane mobilne aplikacije i vještačke inteligencije smo pokazali važnost znanja koje se stiče u školi i da su ljudi još uvijek ispred aplikacija i vještačke inteligencije u rješavanju matematičkih i logičkih zadataka

Ključne reči: Photomath; ChatGPT; vještačka inteligencija; mobilna aplikacija.

Полиноми у основној и средњој школи – методички приступ

Владимир Балтић

Математичка гимназија, ВИШЕР
e-mail: balticvladimir@gmail.com

Апстракт. О овој изузетно битној теми могли би детаљно да изложимо материју неколико месеци, са освртима на осетљива места. Покушаћемо да у овом излагању представимо све значајније аспекте рада са полиномима у основној и средњој школи. Прво ћемо дати краћи теоријски преглед свих значајнијих појмова и техника, а затим ћемо се осврнути на теме везане за полиноме на такмичењима (и у основној и у средњој школи), а онда ћемо све то илустровати на мноштву такмичарских задатака, као и задатака са пријемних испита. У теми ћемо дати посебан осврт на следеће теме:

- збир коефицијената полинома,
- рационалне нуле полинома са целобројним коефицијентима,
- Безуов став,
- факторизација полинома,
- вишеструке нуле полинома,
- доказаћемо да је број $\sqrt[r]{r}$ ирационалан за сваки прост број r ,
- Хорнерова шема (као алгоритамски најефикаснији поступак за одређивање вредности полинома, морала би да се ради и у основној и у средњој школи),
- Виетове формуле (иако званично нису у програму пријемних на великом броју факултета могу значајно убрзати решавање задатака),
 - полиноми више променљивих,
 - симетрични полиноми.

Кључне речи: Полиноми; Безуов став; Хорнерова шема; факторизација полинома; Виетове формуле; симетрични полиноми.

Аутоматско решавање конструктивних проблема у геометрији

Милан Банковић

Математички факултет, Београд
e-mail: milan.bankovic@matf.bg.ac.rs

Весна Маринковић

Математички факултет, Београд
e-mail: vesna.marinkovic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Конструктивни проблеми у геометрији су проблеми код којих је потребно помоћу лењира и шестара конструисати неку геометријску фигуру, под претпоставком да су задати неки њени елементи. Поред значаја у математичком образовању, овакви проблеми у последње време постају значајни и у рачунарству, пре свега у контексту аутоматизације процеса њиховог решавања. Са рачунарског аспекта, овакви проблеми спадају у проблеме претраге, те је за њихово решавање погодно користити методе и алате вештачке интелигенције.

У овом излагању разматрамо два различита приступа овом проблему. Први приступ подразумева развој специфичног алгорита претраге за решавање конструктивних проблема. Овај приступ нам пружа могућност прилагођавања домену примене, као и употребе специфичних ефикасних хеуристика приликом претраге. Као илустрација овог приступа, биће размотрен конструкцијски решавач *ArgoTriCS* [1], развијен у програмском језику *Prolog*. Други приступ подразумева употребу постојећих алата вештачке интелигенције који су веома ефикасни у решавању проблема комбинаторне претраге уопште. У овом приступу на нама је само да конструктивне проблеме моделујемо на одговарајући начин и њихово решавање препустимо готовом алату. Као илустрацију овог приступа, размотрићемо употребу решавача ограничења над коначним доменима, као и моделовање конструктивних проблема на језику *MiniZinc* [2]. Ова два приступа биће упоређена на Верниковом корпусу [3] конструктивних проблема, код којих је циљ конструисати троугао, под претпоставком да су дате локације трију значајних тачака троугла.

Кључне речи: конструктивни проблеми; алгоритми претраге; решавачи ограничења

Библиографија

- [1] **Vesna Marinković.** ArgoTriCS—automated triangle construction solver. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 29(2):247–271, 2017.
- [2] **Milan Banković.** Automation of Triangle Ruler-and-Compass Constructions Using Constraint Solvers. *Automated Deduction in Geometry – ADG 2023*, 2023.
- [3] **William Wernick.** Triangle constructions with three located points. *Mathematics Magazine*, 55(4):227–230, 1982.

Папусови и Штајнерови ланци са заједничким кругом

Ђорђе Баралић

Математички институт САНУ
e-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Владимир Божовић

Универзитет Црне Горе
e-mail: vladobozovic@gmail.com

Никола Радојичић

Природно-математички факултет у Подгорици
e-mail: nikola.radojicic@os-mnikcevic.edu.me

Апстракт. У раду приказујемо нове резултате које се односе на Папусове и Штајнерове ланце кругова у који сви додирују два фиксна круга, а сваки круг у ланцу додирује свог претходника. У заједничком раду смо истраживали конфигурације и теореме инциденција које настају када се посматрају парови ланаца који имају заједнички круг у ланцу. Откривене су нове занимљиве класе кругова које пролаза кроз додирне тачке кругова у конфигурације и показано је да центри кругова сваке фамилије припадају кривој другог реда.

Кључне речи: Папусови ланци; Штајнерови ланци; ортогоналност; инверзија.

Библиографија

- [1] **Ђ. Baralić, D. Jakanović, M. Milićević.** Variations of Steiner Porism. *Mathematical Inteligencer*, 2017, 39, 6 - 11.
- [2] **Ђ. Baralić, V. Bozhović, N. Radojčić.** Orthogonality related to Steiner and Pappus chains. *arXiv:2311.05895*.

The role of open-ended tasks in learning and teaching mathematics

Nives Baranović

*Faculty of Humanities and Social Sciences in Split, Croatia
e-mail: njozic@ffst.hr*

Jasmina Milinković

*Faculty of Education, University of Belgrade, Republic of Serbia
e-mail: milinkovic.jasmina@yahoo.com*

Abstract. Mathematical tasks are a key means of interaction between students and teachers, and solving tasks is the most common activity, especially in elementary and high school mathematics classes. Therefore, the mathematical task has a significant role in learning and teaching mathematics, as well as in evaluating the students' mathematical knowledge, skills and habits. By using a variety of tasks, the teacher has the opportunity to provide an environment in which students can adopt and develop different strategies and methods of solving tasks, research, analyse, make assumptions, conclude, etc. By knowing the different types of tasks and their characteristics, choosing tasks with a specific purpose and the way of implementation in class, the teacher can influence the development of the mathematical competences of his students, but also what kind of attitude towards mathematics his students will develop.

Open-ended tasks are of particular importance because they can serve to recognize and develop students' creativity and various mathematical processes. Open-ended tasks are usually tasks with higher cognitive demands, because solving them requires appropriate conceptual knowledge, and the solutions of which there can be more than one (finite or infinitely many) are usually reached by different methods and strategies. The aim of this paper is to point out their possibilities in learning and teaching mathematics through appropriate examples of open-ended tasks.

Keywords: Open tasks; problem-solving process; tasks classification; task solving strategies.

References

- [1] **N. Baranović, J. Milinković.** Students' achievements and typical obstacles in solving open-ended problems. In: J. Novotna, H. Moraova (Eds.), New directions in Elementary mathematics education. *In: Proceedings of International Symposium Elementary Mathematics Teaching, SEMT 23, August 20 - August 24, 2023*, pp. 73-83. Prague, the Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.
- [2] **J. Milinković, I. Radovanović.** Pedagogical Perspective on Ill-defined mathematical Problems. *Journal Plus Education*, vol 29, 2, 2021, 256 - 271.
- [3] **J. B. W. Yeo.** Mathematical Tasks: Clarification, Classification, and Choice of Suitable Tasks for Different Types of Learning and Assessment. *MME Technical Report. Singapore: National Institute of Education*, 2007.

Проблеми површине и запремине у Геогобра окружењу

Радослав Божић

Учитељски факултет, Универзитет Едуконс, Сремска Каменица,
Гимназија Светозар Марковић, Нови Сад
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com

Апстракт. Изучавање површине геометријских фигура и тела, односно запремине тела, почиње у разредној настави и заступљено је, у мањој или већој мери, током читавог математичког образовања. Пракса је показала, као и истраживања у овој области, да значајан број ученика има потешкоћа већ код усвајања појма површине и запремине, али и током њиховог каснијег изучавања. Неке од ових потешкоћа могу бити превазиђене уз помоћ образовног софтвера Геогобра. Овај софтвер омогућава квалитетну визуелизацију математичких садржаја, укључујући и визуелизацију геометријских тела, у тродимензионалном радном окружењу. Међутим, иако веома корисна, Геогобра је само алатка у рукама наставника. За њену успешну примену, неопходно је осмислити и одговарајући приступ. Слушаоцима ће бити представљене могућности примене образовног софтвера Геогобра у изучавању површине и запремине, кроз примену проблемске наставе. Биће приказани примери за основну и средњу школу, укључујући примену одређеног интеграла на израчунавање површине и запремине.

Кључне речи: Геогобра; Површина; Запремина.

Библиографија

- [1] **R. Bozic** The application of modern technology in teaching and learning stereometry. *In: Mathematical Society of Serbia - Scientific conference "Research in Mathematics Education" Proceedings, Belgrade, Serbia, 2019*, pp. 102 - 111.
- [2] **N. Chen, H. Guan, Y. Wang, R. Chen, R. Cai and C. Zhang** A Comparative Study of Solving the Surface Area of Solid Figures in Dynamic Geometry System. *In: 16th International Conference on Computer Science and Education (ICCSE), Lancaster, United Kingdom, 2021*, pp. 777 - 782.

Cyclically presented groups and n -valued groups

Victor Buchstaber

*Higher School of Economics, Moscow, Russia
Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia
e-mail: buchstab@mi-ran.ru*

Andrei Vesnin

*Tomsk State University, Tomsk, Russia
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
e-mail: vesnin@math.nsc.ru*

Abstract. A group representation in which the number of defining relationships is equal to the number of generators is called balanced. A balanced representation of the fundamental group of a closed 3-manifold occurs, for example, if the manifold is given by a Heegaard splitting.

A group is said to be cyclically presented if it has such a balanced representation that all defining relations are obtained from one by cyclic permutations of generators. Thus, if some group is cyclically presented, then it has a cyclic automorphism. The well-known class of cyclically presented groups is a class of Fibonacci groups, the question of finiteness of which was raised by Conway in 1965.

We will discuss some classes of cyclically presented groups and present results on the realizability of these groups as fundamental groups of closed 3-manifolds [1, 2].

Following the coset construction from [3,4], we will use cyclic automorphisms of cyclically presented groups to define corresponding n -valued groups.

The research was done in the frame of the agreement between HSE and TSU about mirror laboratories.

Keywords: cyclically presented groups; n -valued groups; 3-manifolds.

References

- [1] **A. C. Kim, A. Vesnin.** Fractional Fibonacci groups and manifolds. *Siberian Math. J.*, 1998, 39, 655 - 664.
- [2] **A. Szczepanski, A. Vesnin.** On generalized Fibonacci groups with an odd number of generators. *Commun. Algebra*, 2000, 28, 959 - 965.
- [3] **V. M. Buchstaber, E. G. Rees.** Multivalued groups, their representations and Hopf algebras. *Transform. Groups*. 1997, 2, 325 - 349.
- [4] **V. M. Buchstaber.** n -Valued groups: theory and applications. *Moscow Math. J.*, 2006, 6, 57 - 84.

Статистичка анализа расподеле повезаности и неуређености протеина у мрежама протеинских интеракција вируса SARS-CoV-2

Лазар Васовић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: pd212006@alas.matf.bg.ac.rs

Апстракт. Биолошки системи се често сматрају мрежама интерагујућих блокова. Природан математички модел који произилази из тога јесте граф. Међу најважнијим биолошким системима налазе се мреже протеинских интеракција, познате као интерактоми. У њима чворови представљају протеине, док свака неусмерена грана сведочи о постојању специфичне физичке интеракције између два протеина. У овом раду је анализирано неколико интерактома вируса *SARS-CoV-2*. Конкретно, статистичким методама одређене су и испитане расподеле повезаности (броја суседа, тј. степена) чворова ових мрежа, а такође су размотрене и расподеле неуређености протеина према неколико познатих мера неуређености. Утврђено је да повезаност подлеже степеној расподели (енгл. *power law*), према којој већина чворова има мали број суседа, уз мањи број високоповезаних хабова. Расподеле већине мера неуређености су звонасте, али најчешће асиметричне, будући да је више уређених протеина. Расподеле појединачних суседстава једнаке су расподелама целих интерактома, при чему средња вредност мере неуређености добро описује општу неуређеност сваког суседства. Заједничка расподела повезаности и неуређености, као и условна расподела неуређености при познатом степену чвора, наглашавају негативну корелацију између ове две мере у размотреним вирусним мрежама.

Кључне речи: *SARS-CoV-2*; мрежа протеинских интеракција; неуређености протеина; расподела вероватноће.

An introduction to sumsets

Илија Вреџица

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade 11158, Serbia
e-mail: ilija.vrecica@matf.bg.ac.rs

Abstract. In this presentation we will look at a few results concerning sumsets. In particular, we present the Khovanskii theorem, how Ehrhart theory interacts with sumsets, and a few recent developments in the effort to enumerate the number of elements of a sumset. In the end we will showcase some open problems regarding sumsets.

Keywords: Lattices; Minkowski theory; sumsets; Khovanskii's theorem.

Дељивост бројем 7 и један „тежак разломак”

Дејан Вурдеља

ЕТШ „Земун”, Наде Димчић 4, Земун
e-mail: dvurdelja@sbb.rs

Апстракт. У овом излагању подсетићемо се уобичајених критеријума дељивости бројевима из скупа $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ а затим детаљно размотрити и примерима илустровати неке критеријуме дељивости бројем 7.

Приказаћемо и како се може решити један задатак („тежак разломак”) са квалификационог теста средњошколаца за улазак у амерички математички олимпијски тим. Задатак гласи: *Упростити израз*

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

Stohastičke metode u veštačkoj inteligenciji

Radoslav Galić

*Elektrotehnički fakultet Osijek flos Jurija Strossmayera 18. Osijek Republika Hrvatska
e-mail: radoslav.galic@etfos.hr*

Elvir Čajić

*Osnovna škola Prokosići i Ekonomsko hemijska škola Lukavac, školska6 ,Lukavac Federacija BiH
e-mail: ecajic86@gmail.com*

Zvezdan Stojanović

*Mtel, Zvornik, Republika Srpska, Evropski Univerzitet Brčko Distrikt, BiH
e-mail: zvezdan.stojanovic@gmail.com*

Dario Galić

*Elektrotehnički fakultet Osijek flos Jurija Strossmayera 18. Osijek Republika Hrvatska
e-mail: galic@etfos.hr*

Apstrakt. Ovaj rad istražuje primene stohastičkih metoda u oblasti veštačke inteligencije (VI), fokusirajući se na njihov doprinos optimizaciji, učenju i donošenju odluka. Koristeći stohastičke modele, omogućavamo VI da efikasno obradi nesigurnost, nepredvidljivost i varijaciju u podacima. Analiziramo kako stohastički procesi mogu poboljšati konvergenciju algoritama u treniranju dubokih neuronskih mreža i optimizaciji parametara. Takođe, istražujemo primene stohastičkih simulacija u oceni performansi algoritama mašinskog učenja u realnim uslovima. Kroz ovu studiju, ukazujemo na ključne prednosti i izazove stohastičkih metoda u domenu veštačke inteligencije. Uz to, istražujemo kako stohastičke metode omogućavaju modelima veštačke inteligencije da se bolje prilagode promenljivim okolnostima i nepredvidivim situacijama, čime se povećava njihova robustnost i primenljivost u stvarnom svetu. Analiziramo i uticaj stohastičkih elemenata na procese donošenja odluka, istražujući kako ova svojstva doprinose adaptivnosti sistema u dinamičkim okruženjima. Kroz pregled relevantnih studija i eksperimenata, ova istraživanja pružaju uvid u to kako stohastičke metode doprinose evoluciji veštačke inteligencije, čime se otvaraju nove perspektive za razumevanje i unapređenje performansi modela u realnim scenarijima. Ovaj rad doprinosi širem razumevanju uloge stohastičkih procesa u oblasti veštačke inteligencije, naglašavajući potencijal za dalji razvoj i primene u različitim domenima.

Ključne reči: Stohastički procesi, Veštačka inteligencija, Optimizacija, Učenje pod nesigurnošću, Duboko učenje..

Bibliografija

- [1] **Robbins, H., & Monro, S. (1951).** A Stochastic Approximation Method. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(3), 400-407. doi: 10.1234/amstat.1951.400
- [2] **Hinton, G., Srivastava, N., Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Salakhutdinov, R. (2012).** Improving neural networks by preventing co-adaptation of feature detectors. *arXiv preprint arXiv:1207.0580*.
- [3] **Kingma, D. P., & Ba, J. (2014).** Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*.
- [4] **Sutton, R. S., & Barto, A. G. (1998).** Reinforcement Learning: An Introduction. *MIT Press*.
- [5] **Bishop, C. M. (2006).** Pattern Recognition and Machine Learning. *Springer*.
- [6] **Neal, R. M. (2011).** MCMC Using Hamiltonian Dynamics. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, 2(11), 123-136. doi: 10.1201/b10415-11
- [7] **Welling, M., & Teh, Y. W. (2011).** Bayesian Learning via Stochastic Gradient Langevin Dynamics. *Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning (ICML-11)*, 28(3), 681-688.
- [8] **Bishop, C. M., Svensén, M., & Williams, C. K. (1998).** GTM: The generative topographic mapping." *Neural Computation*, 10(1), 215-234. doi: 10.1162/089976698300017746

Schwarz-Pick lemma for (α, β) -harmonic functions in the unit disc

Jelena Gajić

*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Banja Luka, Republic of Srpska
e-mail: jelena.gajic.mm@gmail.com*

Abstract. We prove Schwarz–Pick lemma for (α, β) -harmonic functions u in the disc, where α and β are complex parameters satisfying $\Re\alpha + \Re\beta > -1$. We prove sharp estimate for the $Du(0)$ for such functions in terms of L^p norm of the boundary function. Also, we give asymptotically sharp estimate of $\|Du(z)\|$. Estimates of $\|Du(z)\|$ are extended to higher order derivatives. Our results extend earlier results for α -harmonic and T_α -harmonic functions. This is joint work with Miloš Arsenović and this is work in progress.

Keywords: (α, β) -harmonic functions; Schwarz lemma; (α, β) -Poisson integral.

References

- [1] **F. Colonna.** The Bloch Constant of Bounded Harmonic Mappings. *Indiana University Mathematics Journal*, 1989, 38(4), 829-840.
- [2] **M. Li, X. Chen.** Schwarz Lemma for Solutions of the α -harmonic Equation. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2022, 45, 2691–2713.
- [3] **M. Klintborg, A. Olofsson.** A series expansion for generalized harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics*, 2021, 11 no. 3, Paper No. 122.

Analysis of the textbook for 2nd grade of primary school by Zavod za udžbenike according to the structural blocks of TIMSS research

Teodora Gavrilović

*University of Belgrade, Faculty of Education, Kraljice Natalije 43, Belgrade, Serbia
e-mail: teodora.gavrilovic.2019@gmail.com*

Maja Andić

*University of Belgrade, Faculty of Education, Kraljice Natalije 43, Belgrade, Serbia
e-mail: majaandjic3@gmail.com*

Katarina Ilić

*University of Belgrade, Faculty of Education, Kraljice Natalije 43, Belgrade, Serbia
e-mail: katarinailic.writing@gmail.com*

Olivera Đokić

*University of Belgrade, Faculty of Education, Kraljice Natalije 43, Belgrade, Serbia
e-mail: olivera.djokic@uf.bg.ac.rs*

Abstract. The mathematics textbook is of a great value to teachers when planning lessons, so its analyses are significant for understanding students' achievements in international research projects such as TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) [1]. The aim of the research is to identify the tendencies in structuring pedagogical situations in different domains of textbooks for the 2nd grade of primary school by Zavod za udžbenike [3]. Pedagogical situations represent a dynamic characteristic of a textbook with activities, explanations (narrations), example exercises that offer educational opportunities for introducing mathematical concepts and revealing and understanding mathematical ideas. The suggested list of structural blocks within TIMSS methodology 2011 research with certain categories and sub-categories was extended with the list of Jelić and Đokić [2]. The analysed mathematics textbook for the 2nd grade consists predominantly of exercises in comparison to other dynamic structural elements of the textbook. The results of the research show that it is necessary to plan more carefully a coherent structure of the mathematics textbook, leading students to form the concepts of number gradually, including geometrical concepts and concepts of measurement, as well as to achieve higher levels of knowledge in the 2nd grade (students' reasoning).

Keywords: TIMSS; pedagogical situations; 2nd grade mathematics textbook; Zavod za udžbenike; Serbia.

References

- [1] **J. Cai, I. Mok, V. Reddy, K. Stacey.** International Comparative Studies in Mathematics: Lessons for Improving Students' Learning. In: *International Comparative Studies in Mathematics, ICME-13 Topical Surveys*, Springer, Cham, 2016, pp. 1-36.
- [2] **M. Jelić, O. Đokić.** Ka koherentnoj strukturi udžbenika matematike – analiza udžbenika prema strukturnim blokovima TIMSS istraživanja [Towards coherent structure of mathematics course books: Analysis of course books according to structural blocks of TIMSS research]. *Teaching Innovations*, 2017, 30, pp. 67-81.
- [3] **O. Todorović, S. Ognjanović.** Matematika 2-udžbenik i vežbanka za drugi razred osnovne škole [Mathematics 2-textbook and practice book for the second grade of elementary school], Zavod za udžbenike, Beograd, 2019.

Hölder and Lipschitz continuity of quasiconformal harmonic mappings in space

Anton Gjokaj

University of Montenegro, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Cetinjski put b.b. 81000 Podgorica,
Montenegro
e-mail: antondj@ucg.ac.me

Abstract. We consider the properties of quasiconformal and harmonic mappings from the unit ball $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$ to a spatial domain with boundary of a certain smoothness.

An affirmative answer to the question of Lipschitz continuity is obtained in the case of spatial domains with $C^{1,\alpha}$ boundary, for some $\alpha \in (0, 1)$, and on the question of uniform Hölder continuity when the image is a domain with C^1 boundary. Additionally, Lipschitz continuity is also proven in the case when the condition that the mapping is harmonic is replaced with the condition that the Laplacian of the function belongs to the space $L^p(\mathbf{B}, \mathbf{R}^n)$, for $p > n$.

A significant role in proving these results plays the Hardy-Littlewood theorem. The theorem gives the connection between the coefficient of μ -Hölder continuity on sphere at $\eta \in S$ of the harmonic function $u = u(x)$, i.e.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\xi) - u(\eta)\|}{\|\xi - \eta\|^\mu},$$

and of the value

$$\sup_{x \in [0, \eta)} \|\nabla u(x)\| (1 - \|x\|)^{1-\mu}.$$

Keywords: Harmonic mappings, quasiconformal mappings, Hölder continuity, Lipschitz continuity

References

- [1] **A. Gjokaj.** Hölder continuity of quasiconformal harmonic mappings from the unit ball to a spatial domain with C^1 boundary. *Indagationes Mathematicae*, 2022, 33, pp. 1061-1070.
- [2] **A. Gjokaj, D. Kalaj.** Quasiconformal harmonic mappings between the unit ball and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary. *Potential Analysis*, 2022, 57, pp. 367-377.
- [3] **D. Kalaj, E. Saksman.** Quasiconformal mappings with controlled Laplacean. *Journal d'Analyse Mathématique*, 2019, 137, No. 1, pp. 251-268.
- [4] **M. Pavlović.** Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function. *Rev. Mat. Iberoam*, 2007, 23, pp. 831-845.

Dimensionality Reduction of Broad Absorption Line Quasar Spectra

Nicolás Guerra-Varas

*University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia; INAF-Osservatorio di Roma, Via Frascati 33, Monte Porzio Catone, Italia; Università di Roma Tor Vergata, Via della Ricerca Scientifica 1, Roma, Italia
e-mail: nicolas.guerravaras@inaf.it*

Andjelka Kovačević, Dragana Ilić, Luka Popović

University of Belgrade, Studentski trg 16, Belgrade, Serbia

Angela Bongiorno, Enrico Piconcelli

INAF-Osservatorio di Roma, Via Frascati 33, Monte Porzio Catone, Italia

Francesco Tombesi

Università di Roma Tor Vergata, Via della Ricerca Scientifica 1, Roma, Italia

Nicole Nesvadba

Université de la Côte d'Azur, Bd de l'Observatoire CS 34229, Nice, France

Abstract.

Broad Absorption Line (BAL) quasars are one of the most clear manifestations of active galactic feedback in action and are associated with strong AGN-driven winds that can inject energy and momentum into the interstellar medium of the host galaxy and affect its evolution along cosmic time. With large-scale surveys such as the Vera C. Rubin Observatory Legacy Survey of Space and Time (LSST) on the way, it is crucial to implement effective algorithms that can identify these objects within large photometric datasets. The aim of this master's thesis work is to build such an algorithm using Deep Learning (DL). Here, we present our progress on the processing of spectra of a pure sample of human-selected BAL QSO from the seventh data release of the Sloan Digital Sky Survey. We extract features from QSO spectra by applying projection and manifold dimensionality reduction methods such as Principal Component Analysis (PCA) and Locally Linear Embedding (LLE). We explore which of these methods can accurately represent BAL QSOs in a lower-dimension space more effectively. These features will be fed into our yet-to-build DL algorithm and hopefully improve performance. Here, we present initial results as well as a brief comparison of these dimensionality reduction methods.

Keywords: Quasars; Spectra; Dimensionality Reduction; Machine Learning

References

- [1] **M.H. Naddaf et al.** Dust-driven wind as a model of broad absorption line quasars. *Astronomy & Astrophysics*, 2023, 675, A43.
- [2] **R.R.J. Weymann, et al.** Comparisons of the Emission-Line and Continuum Properties of Broad Absorption Line and Normal Quasi-stellar Objects. *Astrophysical Journal*, 1991, 373, 23.
- [3] **R.R. Gibson et al.** A Catalog of Broad Absorption Line Quasars in Sloan Digital Sky Survey Data Release 5 *Astrophysical Journal*, 2009, 692, 1, 758.

Математика у итвининг пројектима

Александра Даниловић

ОШ "Светислав Голубовић Митраљета", Далматинске загоре 94, Батајница
e-mail: aleksdan@email.com

Апстракт. Презентација је пример како могу да се развијају математичке вештине код ученика путем итвининг (виртуелног) пројекта. Најпре је укратко представљен итвининг портал који је 2005. године покренула Европска Комисија, кључне компетенције и пројекат "Дивно путовање". Затим се кроз итвининг пројекат "Дивно путовање" даје приказ како су ученици развијали математичке и друге вештине. Почетак 21. века је донео нагли развој информационо-комуникационих технологија (ИКТ) што је олакшало међународну комуникацију и сарадњу између наставника и ученика. Такође, изуми и открића у науци и техници су нам пружили огромну количину доступних информација. Информације и знања су постали кључни термини за описивање савременог друштва. Оваква ситуација представља изазов не само за данашње друштво, већ и за образовни систем па и саме школе. За време у коме живимо је врло важно на који начин поступамо са информацијама и знањем те је неопходно промишљати на које све начине наши ученици могу да стекну и примене своје знање. Такође, како да стекну вештине и искористе их, односно буду способни да их сврсишодно употребе што се назива компетентношћу. Између осталог у томе им могу помоћи и итвининг пројекти који су најчешће мултидисциплинарни те ученика стављају у различите позиције и подстичу на сарадњу са вршњацима из других школа/земаља.

Кључне речи: итвининг; пројектно учење; компетенције.

Библиографија

- [1] **Gajek E. Poszytek P.** eTwinning as a way to education of the future. Foundation for the Development of the Education System. *Warsaw*, 2009.
- [2] **European Commission.** Study of the Impact of eTwinning on Participating Pupils, Teachers and Schools: Final Report. Publications Office of the European Union. <https://op.europa.eu/s/nFAW>, 2013
- [3] **eTwinning Partners.** <https://view.genial.ly/609e156e6a45c80d9e1b3625/presentation-a-wonderful-journey> , 2021.

Sonification: how to present astronomical data and images with sounds

Aurello Deandra

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: aurello.deandra@students.uniroma2.eu*

Abstract. Sonification is the process of conveying data using non-verbal sound (Kramer, et al. 1999). We briefly present two examples of sonification in astronomy: spectral audification (Trayford, et al., 2023) and image shape sonification (Deandra, et al., 2022). We take a closer look into an example method of direct sonification using a commonly used Python module. In this deep dive, sonification of a simulated tick-tock signal is presented. The sonification is done with two methods: direct signal sonification and induced envelope. The direct signal sonification method assumes the tick-tock signal is an audio waveform, while on the induced envelope method, the tick-tock signal acts as the envelope to a 440 Hz sine waveform. We conclude the presentation with a suggestion that sonification is beneficial for improving accessibility of science.

Keywords: Accessibility; Sonification ; Tick-tock signal.

References

- [1] A. Deandra, M. Putra, M. I. Mandasari, C. Kunjaya, D. Herdiwijaya, Aprilia. An Application of Sonification as an Alternative for the Accessibility of Astronomical Images to the Visually Impaired. *In: 2nd Workshop on Astronomy Beyond the Common Senses for Accessibility and Inclusion*, 2022, pp. 118 - 121.
- [2] G. Kramer, B. Walker, T. Bonebright, P. Cook, J. Flowers, N. Miner, J. Neuhoff, R. Bargar, S. Barrass, J. Berger, G. Evreinov, W. T. Fitch, M. Gröhn, S. Handel, H. Kaper, H. Levkowitz, S. Lodha, B. Shinn-Cunningham, M. Simoni, S. Tipei Sonification Report: Status of the Field and Research Agenda. *In: International Community for Auditory Display*, 1999.
- [3] J. W. Trayford, C. M. Harrison, R. C. Hinz, M. K. Blatt, S. Dougherty, A. Girdhar Inspecting spectra with sound: proof-of-concept & extension to datacubes. *RAS Techniques an Instrument*, 2023, 2(1), 387 - 392.

On BV homeomorphisms

Luigi D'Onofrio

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
e-mail: luigi.donofrio@uniparthenope.it

Abstract. We obtain the rectifiability of the graph of a bounded variation homeomorphism f in the plane and relations between gradients of f and its inverse. Further, we show an example of a bounded variation homeomorphism f in the plane which satisfies the (N) and (N^{-1}) properties and strict positivity of Jacobian of both itself and its inverse, but neither f nor f^{-1} is Sobolev.

Keywords: Geometric Function Theory; Mappings of finite distortion.

References

- [1] **F. Barahona, M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt.** An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operation Research*, 1988, 36, 493 - 513.
- [2] **A. Hertz, E. Taillard, D. de Werra.** Tabu search. *In: E. Arts and J.K. Lenstra (eds.), Local Search in Combinatorial Optimization, Wiley, Chichester, 1997*, pp. 121 - 136.
- [3] **G. Pataki, S. Schmieta.** The DIMACS library of semidefinite - quadratic - linear programs. *Technical report, Computational Optimization Research Center, Columbia University, 2002.*

On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization

Oleksandr Dovhopiatyi

Zhytomyr Ivan Franko State University, 40, Velyka Berdychiv'ska Str., 10 008 Zhytomyr, UKRAINE
e-mail: Alexdov111111@gmail.com

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University, 40, Velyka Berdychiv'ska Str., 10 008 Zhytomyr, UKRAINE; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Slov'yans'k
e-mail: eseostyanov2009@gmail.com

Abstract. A Beltrami equation with two characteristics is a differential equation of the form

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z + \nu(z) \cdot \overline{f_z}, \quad (1)$$

where $\mu = \mu(z)$ and $\nu = \nu(z)$ are given measurable functions with $|\mu(z)| < 1$ and $|\nu(z)| < 1$ a.a. Let $\mu : D \rightarrow \mathbb{D}$ and $\nu : D \rightarrow \mathbb{D}$ be functions such that the relation $|\mu(z)| + |\nu(z)| < 1$ holds for almost any $z \in D$. We will consider that $\mu(z) = \nu(z) \equiv 0$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Fix $n \geq 1$ and set

$$\mu_n(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in \mathbb{C}, K_{\mu, \nu}(z) \leq n, \\ 0, & \text{otherwise in } \mathbb{C}, \end{cases} \quad \nu_n(z) = \begin{cases} \nu(z), & z \in \mathbb{C}, K_{\mu, \nu}(z) \leq n, \\ 0, & \text{otherwise in } \mathbb{C}. \end{cases} \quad (2)$$

Let $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a homeomorphic solution of the equation $(f_n)_{\bar{z}} = \mu_n(z) \cdot (f_n)_z + \nu_n(z) \cdot \overline{(f_n)_z}$. Set $g_n(z) := f_n^{-1}(z)$. Observe that f_n is conformal at the neighborhood of the infinity, so there is a continuous extension $f_n : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Thus $f_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ and $f_n(\infty) = \infty$. Note that, $g_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is quasiconformal, in particular, g_n is almost everywhere differentiable in \mathbb{C} . It may be showed that, $f_n(z) = a_n z + b_n + o(1)$ as $z \rightarrow \infty$, where $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ and $a_n \neq 0$. We may consider that $a_n = 1$ and $b_n = 0$ for any $n \in \mathbb{N}$. Note that such a function f_n is unique.

Let

$$K_{\mu_{g_n}}(w) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\bar{w}}|^2}{(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\bar{w}}|)^2}, \quad K_{I,p}(w, g_n) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\bar{w}}|^2}{(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\bar{w}}|)^p}. \quad (3)$$

Theorem. Let D be a domain in \mathbb{C} such that \overline{D} is a compact set in \mathbb{C} , let $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ and $\nu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ be Lebesgue measurable functions vanishing outside D such that the relation $|\mu(z)| + |\nu(z)| < 1$ holds for almost any $z \in D$. In addition, let μ_n, ν_n, f_n and g_n as above, $n = 1, 2, \dots$. Let $Q : \mathbb{C} \rightarrow [1, \infty]$ be a Lebesgue measurable function. Assume that the following conditions hold: 1) for each $0 < r_1 < r_2 < 1$ and $y_0 \in \mathbb{C}$ there is a set $E \subset [r_1, r_2]$ of positive linear Lebesgue measure such that the function Q is integrable over the circles $S(y_0, r)$ for any $r \in E$; 2) there exist a number $1 < p \leq 2$ such that, for any bounded domain $G \subset \mathbb{C}$ there exists a constant $M = M_G > 0$ such that $\int_G K_{I,p}(w, g_n) dm(w) \leq M$ for all $n = 1, 2, \dots$, where $K_{I,p}(w, g_n)$ is defined in (3); 3) the inequality $K_{\mu_{g_n}}(w) \leq Q(w)$ holds for a.e. $w \in \mathbb{C}$, where $K_{\mu_{g_n}}$ is defined in (3). Then the equation (1) has a continuous $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$ -solution f in \mathbb{C} such that $f(z) = z + \varepsilon(z)$, where $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ as $z \rightarrow \infty$.

Corollary. In particular, the conclusion of Theorem holds if, in this theorem, we abandon condition 1), accept condition 3), and replace condition 2) with the requirement $Q \in L_{loc}^1(\mathbb{C})$. If G is some bounded domain in \mathbb{C} and K is a compactum in G , then there is some domain $G' \subset \mathbb{C}$ and a function Q' equal Q in G' and vanishing outside G' such that Q' is integrable in \mathbb{C} and the relation $|f(x) - f(y)| \leq \frac{C}{\log^{1/2}(1 + \frac{r_0}{2|x-y|})}$ holds for any $x, y \in K$, where $C = C(K, \|Q'\|_1, G) > 0$ is some constant depending only on K, G and $\|Q'\|_1, \|Q'\|_1$ denotes L^1 -norm of Q' in \mathbb{R}^n , and $r_0 = d(K, \partial G)$.

Keywords: Beltrami equations, quasiconformal mappings, mappings with a finite distortion

Закон троструког реципроцитета за твистован други момент Дирихлеових L -функција над рационалним функцијским пољима

Драган Ђокић

*Универзитет у Београду, Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд
e-mail: dragan.djokic@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Расподела простих бројева је уско повезана са расподелом нула и расподелом величине Дирихлеових L -функција на критичној линији. Претпоставка да се све нетривијалне нуле ових функција налазе на критичној линији је Уопштена Риманова хипотеза, најзначајнији отворен проблем у математици. Зато је изучавање момената L -функција тј. њихових средњих вредности у неким добро дефинисаним фамилијама један од кључних циљева аналитичке теорије бројева. Нарочито је занимљива веза момената са чувеном Линделефовом хипотезом, као и са Теоријом случајних матрица која је оригинално развијена за потребе моделирања у физици.

Посебно ће бити разматран нормализован други момент над рационалним функцијским пољима по фамилији свих (не)парних примитивних карактера по простом полиномном модулу Q :

$$S_{\pm}(H, K; Q) = \frac{\sqrt{|Q|}}{\varphi^{\pm}(Q)} \sum_{\substack{\chi \pmod{Q} \\ \chi \neq \chi_0}}^{\pm} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right|^2 \chi(H) \overline{\chi}(K),$$

у који су додатно „уплетена“ још два полинома H и K . Закон троструког реципроцитета даје симетрију између три поменути модула. Прецизније, у [1] је показано да за просте полиноме H , K и Q такве да је $\deg H + \deg K \leq \deg Q$ важи

$$S^{\pm}(H, K; Q) = S^{\pm}(K, \pm Q; H) + S^{\pm}(H, \pm Q; K) + O\left(\sqrt{\frac{|Q|}{|HK|}} \deg Q\right),$$

при чему је грешка из O -члана експлицитно израчуната у оба случаја. Сам назив реципроцитет представља аналогију са Гаусовим законом квадратног реципроцитета за Лежандрове симболе.

Кључне речи: Дирихлеове L -функције; функцијска поља; твистован момент; закон реципроцитета.

Библиографија

- [1] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas. The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L -functions over function fields. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2021, 149, 2851 – 2860

On polynomial entropy of induced maps on symmetric products

Maša Đorić

*Matematički institut SANU
Knez Mihailova 36
11000 Beograd
Serbia
e-mail: masha@mi.sanu.ac.rs*

Jelena Katić

*Matematički fakultet
Studentski trg 16
11000 Beograd
Serbia
e-mail: jelena.katic@matf.bg.ac.rs*

Bojana Lasković

e-mail: bojana.laskovic@gmail.com

Abstract. If X is a compact metric space, then its hyperspace 2^X is the set of all closed non-empty subsets of X , and the k -fold symmetric product X^{*k} is the set of all finite subsets with at most k elements. Given a dynamical system $f : X \rightarrow X$ one can naturally define induced maps $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ and $f^{*k} : X^{*k} \rightarrow X^{*k}$. In the last fifteen years or so, the interaction between the dynamical properties of f and its induced maps f^{*k} and 2^f has been studied.

One of the classical tools to measure the complexity of a system is the topological entropy. It is concentrated on the non-wandering set. For systems with low complexity (i.e. when the topological entropy is zero), the polynomial entropy can make a difference between them. Unlike topological entropy, the wandering points are visible for polynomial entropy.

We compute a lower bound for the polynomial entropy of f^{*k} for any homeomorphism f with a wandering point, i.e. $h_{pol}(f^{*k}) \geq k$. Then we prove that $h_{pol}(2^f) = \infty$ if the system f has a wandering point.

Keywords: polynomial entropy; induced map; hyperspace; symmetric product.

References

- [1] **A. Arbieto, J. Bohorquez.** Shadowing, topological entropy and recurrence of induced Morse-Smale diffeomorphisms. *Math.Z.*, 2023, 68, 303.
- [2] **M. Đorić, J. Katić, B. Lasković.** On polynomial entropy of induced maps on symmetric products. To appear in *Acta Math. Hungar.*
- [3] **M. Lampart, P. Raith.** Topological entropy for set valued maps. *Nonlinear Anal.*, 2010, 73, 1533-1537.

The influence of the application of teaching aids in mathematics teaching on learning outcomes

Sonja Đukić Popović

*OŠ "Miloš Crnjanski", Belgrade
e-mail: sonjica27@yahoo.com*

Stefan Popović

*Faculty of Information Technologies, Belgrade
e-mail: stefan.popovic@alfa.edu.rs*

Abstract. This paper presents the results of research into the justification of the application of teaching aids of one subject in the teaching of another. The impact of the application of several physics teaching aids in mathematics teaching was examined. In this presentation, the focus is on the application of demonstration scales in algebra lessons in the sixth and seventh grade of elementary school. The research was conducted in four elementary schools in Belgrade. The results support the fact that the application of demonstration scales in the teaching of mathematics improves the learning outcomes not only in the subject of mathematics, but also creates a positive impact on the teaching of physics. This research also highlights the importance of the acquisition and use of teaching aids in the education system of each country.

Keywords: mathematics teaching, learning outcomes, teaching methodology

Harmonic mappings in technical designs

Józef Zajac

*The University College of Applied Sciences in Chełm, Poland
e-mail: jzajac.stany@gmail.com*

Abstract. Many properties of technical solutions can be described by selection of an appropriate technical parameters that characterize them. Their authors receive a form of protection for their solutions, called a patent. Studying them it is easy to see that they are not always characterized by the extreme value of parameters in relation to the utility function. This element is often overlooked in the patenting process. It also happens that it is very difficult to choose the right tools and mathematical methods that would allow to solve such a problem.

In the presented lecture, several technical solutions as patents will be shown, with extreme features of the parameters, which were obtained with the help both new and known mathematical methods.

Keywords: harmonic mappings; technical parameters; utility function.

Примена теорије графова у решавању логичко-комбинаторних задатака

Емир Зогић

*Државни универзитет у Новом Пазару, Вука Караџића 9, Нови Пазар, Србија
e-mail: ezogic@np.ac.rs*

Диана Долићанин Ђекић

*Факултет техничких наука Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, Кљаза Милоша 7, Косовска Митровица, Србија
e-mail: diana.dolicanin@pr.ac.rs*

Един Глогић

*Државни универзитет у Новом Пазару, Вука Караџића 9, Нови Пазар, Србија
e-mail: edinglogic@np.ac.rs*

Апстракт. Логичко-комбинаторни задаци су одувек привлачили пажњу ученика како због своје једноставности у поставци тако и због своје дубине математичког знања и размишљања. У решавању одређених логичко-комбинаторних задатака, теорија графова заузима значајно место због разоја генерализације размишљања код ученика. Под графом G подразумевамо уређени пар (V, E) , при чему је V непразан скуп и E бинарна релација дефинисана на скупу V . Елементе скупа V зовемо чворовима, а елементе скупа E гранама графа G . Појам графа добија своју пуну вредност када се граф геометријски представи као скуп тачака (чворова) повезаних непрекидним линијама (гранама).

У нашем излагању бавимо се степеном чвора и лемом о руковању, затим о Ојлеровим и Хамилтоновим графовима, усмереним графовима, минималним разаципујућим стаблима као и о најкраћим путевима у графу. Посебан осврт је на анализи и примени поменутих појмова теорије графова на решавање логичко-комбинаторних задатака у основној и средњој школи.

Кључне речи: логичко-комбинаторни задаци; графови; Ојлерови графови; Хамилтонови графови; стабла

Библиографија

- [1] V. Andrić. Matematika X, priručnik za pripremanje za takmičenja učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda - prva knjiga. *Krug, Beograd*, 1996.
- [2] D. Svetković. Teorija grafova i njene primene. *Naučna knjiga, Beograd*, 1990.
- [3] E. Milovanović, D. Dolićanin, T. Mirković, I. Milovanović. Grafovi-zbirka zadataka. *Državni univerzitet u Novom Pazaru*, 2011.
- [4] D. Stevanović, M. Milošević, V. Baltić. Diskretna matematika, osnove kombinatorike i teorije grafova - zbirka rešenih zadataka. *Društvo matematičara Srbije*, 2004.

Bringing new dimensions to active galactic nuclei (AGN) studies with the Legacy Survey of Space and Time (LSST)

Dragana Ilić

*Department of Astronomy, University of Belgrade - Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: dragana.ilic@matf.bg.ac.rs*

Andjelka B. Kovačević

*Department of Astronomy, University of Belgrade - Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: andjelka.kovacevic@matf.bg.ac.rs*

Luka Č. Popović

*1. Astronomical Observatory Belgrade, Volgina 7, 11000 Belgrade, Serbia, Department of Astronomy, 2. University of Belgrade - Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: lpopovic@aob.rs*

Maša Lakićević

*Astronomical Observatory Belgrade, Volgina 7, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: mlakicevic@aob.rs*

Abstract. Here we will present the research activities of the Serbian AGN Group (SER-SAG) and its contribution to the development of one of the most important and innovative world astronomical facility - Vera C. Rubin Observatory, which will conduct the biggest ten-year survey - the Legacy Survey of Space and Time (LSST).

We will describe the results of SER-SAG team in preparation for the studies of tens of millions active galactic nuclei (AGNs) with LSST. AGNs are nested in the center of a small fraction of galaxies, but should be a phase in evolution of every larger galaxy, which makes this objects particularly important for understanding of galaxy evolution. From one side we show our progress in development of innovative algorithms to detect and characterize variability properties of AGNs. Whereas, the other aspect is the preparation for the follow-up observations of bright sources using 1.4m Milankovic telescope, the biggest astronomical observational facility in Serbia.

Keywords: Active Galactic Nuclei (AGN); time-domain astronomy; observational facilities.

References

- [1] **Kovačević, A.B., Radović, V., Ilić, D. et al.** The LSST Era of Supermassive Black Hole Accretion Disk Reverberation Mapping. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 2022, 262, 49 - 86.

Rešavanje problema p-rezervnog centra pomoću genetskog algoritma

Vladimir Janković

*Fakultet za obrazovanje učitelja i vaspitača, Univerzitet u Beogradu
Kraljice Natalije 43, 11000 Beograd
e-mail: vladimir.jankovic@uf.bg.ac.rs*

Apstrakt. Razmatran je lokacijski problem p-rezervnog centra, čiji je cilj odabir lokacija za uspostavljanje uslužnih centara i dodeljivanje svakog korisnika glavnom centru i rezervnom centru, tako da se minimizuje najveća udaljenost od korisnika do glavnog centra i glavnog centra do rezervnog centra. Data je matematička formulacija problema koja je korišćena u okviru CPLEX rešavača na instancama sa brojem čvorova u intervalu [10, 900]. S obzirom da je problem NP-težak, optimalna rešenja nisu dobijena za sve instance. To je bila motivacija za implementaciju metaheuristike - genetskog algoritma (GA) u cilju dobijanja rešenja za instance problema sa većim brojem čvorova. Elementi genetskog algoritma (reprezentacija rešenja, računanje funkcije prilagođenosti i genetski operatori) prilagođeni su osobinama problema p-rezervnog centra. Primljeni su operator selekcije zasnovan na rangui, operator jednopozicionog ukrštanja i operator proste mutacije. Dobijeni su rezultati genetskog algoritma za svaku instancu i pokazuju efikasnost ove metaheuristike pri rešavanju razmatranog problema. Prikazani rezultati ukazuju na mogućnost hibridizacije genetskog algoritma sa drugom metaheuristikom, ali i pravljenje modela mašinskog učenja za podešavanje parametara GA sa ciljem dobijanja još boljih rešenja.

Ključne reči: genetski algoritam; problem p-rezervnog centra; metaheuristika.

Bibliografija

- [1] **Albareda-Sambola, Maria; Hinojosa, Yolanda; Marin, Alfredo; Puerto, Justo.** When centers can fail: A close second opportunity *Computers & Operations Research*, Volume 62: 145-156, 2015.
- [2] **A.D. López-Sánchez; J. Sánchez-Oro; A.G. Hernández-Díaz.** GRASP and VNS for solving the p-next center problem *Computers & Operations Research*, Volume 104: 295-303, 2019.
- [3] **Mariana A. Londe ; Carlos E. Andrade; Luciana S. Pessoa.** An evolutionary approach for the p-next center problem. *Expert Systems with Applications*, Volume 175, 2021, 114728.

Contraction property of certain classes of log-M-subharmonic functions in the unit ball

David Kalaj

*Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Podgorici
e-mail: davidk@ac.me*

Abstract. We prove a contraction property of certain classes of smooth functions, whose absolute values of elements are log-subharmonic functions in the unit ball, thus extending the results of Kulikov to higher-dimensional space (GAFA (2022)). Moreover, by applying those results we get some new results for harmonic mappings in the complex plane.

Keywords: harmonic mappings, log-subharmonic functions

References

- [1] **D. Kalaj** Contraction property of certain classes of log-M-subharmonic functions in the unit ball, *Journal of Functional Analysis*, Volume 286, Issue 1, 2024.

Međunarodno takmičenje Stemco (država organizator Singapur)

Mirjana Katić

*Matematička gimnazija
Kraljice Natalije 37, Beograd*

e-mail: direktor@mg.edu.rs

Apstrakt. StemCo je međunarodno takmičenje na kome učestvuje oko 40 država i sastoji se iz četiri kategorije. Nama relevantne su Secondary Junior za učenike od sedmog razreda osnovne škole do prvog razreda srednje škole i Secondary Senior za učenike od drugog do četvrtog razreda srednje škole. U obe kategorije postoje 4 različita takmičenja: PhysiCo, ChemiCo, MathematiCo i BioCo – takmičenja iz fizike, hemije, matematike i biologije.

Gradivo zahteva razumevanje, analitičko razmišljanje i brzinu rada.

Svako takmičenje biće organizovano u školi, radiće se na školskim računarima i trajaće dva sata. Dozvoljeno je korišćenje ugrađenog AI ChatGPT u okviru takmičarskog okruženja. Zadaci se dele na lak, srednji i teži nivo i svaki ima 4 ponuđena odgovora, od kojih je samo jedan tačan.

Ključne reči: Takmičenje, matematika, zadaci

Bibliografija

- [1] <https://stemco.org/>

GraphEbra - интерактивна, кориснички оријентисана, веб апликација за рад са графовима

Kristina Kostić

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16
e-mail: kristina.kostic@matf.bg.ac.rs*

Tamara Koledin

*Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар краља Александра 73
e-mail: tamara@etf.rs*

Zoran Stanić

*Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16
e-mail: zstanic@matf.bg.ac.rs*

Апстракт. Представљамо могућности недавно развијеног софтвера, GraphEbra, дизајнираног за унапређење научног истраживања у теорији простих граfoва, тежинских граfoва и усмерених граfoва. Посебно је дизајнирана за рад са означеним граfovима. GraphEbra је кориснички оријентисана веб платформа која користи модерне алате и технологије веб програмирања.

Платформа је:

- интерактивна (корисник има могућност да креира граф и одмах добије низ његових структуралних или спектралних инваријанти или одређених својстава),
- надogradiva (корисник има могућност да је надogradi имплементирањем рачунања нових инваријаната или својстава) и
- креирана под условима GNU Опште јавне лиценце (лиценца гарантује сваком кориснику слободу да покреће, проучава и модификује софтвер).

Остале функционалности укључују импортовање граfoва и модификовање истих путем интерфејса за цртање. Овај софтвер је дизајниран да замени постојеће алате попут new-GRAPH и сличних софтвера. Развијен је у оквиру националног истраживачког пројекта, делимично подржаног средствима ЕУ фондова.

Кључне речи: граfoви; инваријанте; веб апликација.

Norm estimates of the first partial derivatives of generalized harmonic functions

Adel Khalfallah

*Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran 31261, Saudi Arabia
e-mail: khelifa@kfupm.edu.sa*

Miodrag Mateljević

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Republic of Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Abstract. Suppose $\alpha > -1$ and $1 \leq p \leq \infty$. Let $f = P_\alpha[F]$ be an α -harmonic mapping on \mathbb{D} with the boundary F being absolute continuous and $\dot{F} \in L^p(0, 2\pi)$, where $\dot{F}(e^{i\theta}) := \frac{dF(e^{i\theta})}{d\theta}$. We investigate the membership of f_z and $f_{\bar{z}}$ in the space $\mathcal{H}_G^p(\mathbb{D})$, the generalized Hardy space. We prove that if $\alpha > 0$, then both f_z and $f_{\bar{z}}$ are in $\mathcal{H}_G^p(\mathbb{D})$. If $\alpha < 0$, then f_z and $f_{\bar{z}} \in \mathcal{H}_G^p(\mathbb{D})$ if and only if f is analytic. Finally, we investigate a Schwartz Lemma for α -harmonic functions.

Keywords: Poisson integral; Hardy spaces; Bergman spaces; Harmonic functions.

References

- [1] **A. Khalfallah, M. Mateljević** Norm estimates of the partial derivatives and Schwarz lemma for α -harmonic functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, DOI: 10.1080/17476933.2023.2193742 (2023)

Polyhedral products: new results, problems, and applications

Ivan Limonchenko

Mathematical Institute SASA; Kneza Mihaila 36, Belgrade, Serbia
e-mail: ivan.limonchenko@turing.mi.sanu.ac.rs

Abstract. Toric topology is a new rapidly developing area of Mathematics in the crossroads of algebraic geometry, homotopy theory, equivariant topology, homological algebra and combinatorics [1]. The main object of study in toric topology is polyhedral product.

Given any topological pair (X, A) and simplicial complex K on $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$, the polyhedral product $(X, A)^K$ is a subset in X^m s.t. an m -tuple (x_1, \dots, x_m) is in $(X, A)^K$ iff there is a $\sigma \in K: i \notin \sigma \Rightarrow x_i \in A$. Particularly important and useful example here is the moment-angle complex $\mathcal{Z}_K := (D^2, S^1)^K$ of K .

Various applications of toric topology are based on the theorem by Baskakov, Buchstaber and Panov stating that cohomology $H^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$ of \mathcal{Z}_K with coefficients in a PID with unit \mathbb{k} is isomorphic as a \mathbb{k} -algebra to the Tor-algebra $\text{Tor}_{\mathbb{k}[m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k})$ of K (homology of the Koszul complex of K), where $\mathbb{k}[m] := \mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]$ and the Stanley-Reisner ring $\mathbb{k}[K]$ is its quotient by the monomial ideal generated by all non-simplices in K .

By the Hochster decomposition theorem, the latter Tor-algebra is additively isomorphic to the direct sum of all reduced simplicial cohomology groups of all full subcomplexes in K . This string of powerful results establishes a new deep connection between topology, algebra and combinatorics, on which toric topology is largely based and which we explore further in this talk.

Namely, we shall introduce three equivalent definitions (geometrical, algebraic and topological ones) of a new differential acting on the singular (co)chain complex of \mathcal{Z}_K and define the double cohomology of \mathcal{Z}_K w.r.t. the arising bicomplex [2]. Then we shall discuss a couple of calculations and general results. Finally, we shall show applications in combinatorics and TDA, as well as open problems accessible for graduate students.

The talk is based on the recent projects j.w. Anthony Bahri (Rider University, USA), Taras Panov (HSE University, Russia), Jongbaek Song (Pusan National University, Korea) and Donald Stanley (University of Regina, Canada).

Keywords: polyhedral product; Koszul complex; double cohomology; Stanley-Reisner ring; Hochster decomposition.

References

- [1] **V. Buchstaber, T. Panov.** Toric Topology. *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 204, 518 pp.
- [2] **I. Limonchenko, T. Panov, J. Song, D. Stanley.** Double cohomology of moment-angle complexes. *Advances in Mathematics*, 2023, 432, Paper No. 109274, 34 pp.

О постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе

Катарина Лукић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16
e-mail: katarina.lukic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Кривина је најприроднија и најважнија инваријанта Риманове и псеудо-Риманове геометрије. Иако тензор кривине поседује велики број симетрија, лакше је радити са Јакобијевим операторима за које је познато да у потпуности одређују тензор кривине. Природно се поставља питање да ли постоји тензор кривине за дате Јакобијеве операторе на које је одговорено у дефинитном случају у [1], а потом је у [2] извршено уопштење у недефинитном случају. За фамилију самоадјунгованих ендоморфизама \mathcal{K}_X , при чему $X \in \mathcal{V}$, на простору са скаларним производом (\mathcal{V}, g) кажемо да је компатибилна ако за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ важи $g(\mathcal{K}_X Y, Y) = g(\mathcal{K}_Y X, X)$. Важи теорема: Ако \mathcal{K}_X за све неизотропне $X \in \mathcal{V}$ чине компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама на простору са скаларним производом \mathcal{V} која задовољава $\mathcal{K}_X X = 0$, онда постоји јединствен алгебарски тензор кривине на \mathcal{V} чији су \mathcal{K}_X Јакобијеви оператори.

Кључне речи: тензор кривине; Јакобијеви оператори; недефинитан простор.

Библиографија

- [1] **V. Andrejić.** The proportionality principle for Osserman manifolds. *J. Geom. Phys.*, 2022, 176, 104516.
- [2] **V. Andrejić, K. Lukić.** On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators. *Filomat*, 2023, 37, 8465–8471.

On Recent Developments in Change Point Analysis using Integral Transforms

Žikica Lukić

*PhD student at Faculty of Mathematics University of Belgrade
Studentski trg 16
11000 Belgrade, Serbia
e-mail: zikicamaster@gmail.com*

Bojana Milošević

*Faculty of Mathematics University of Belgrade
Studentski trg 16
11000 Belgrade, Serbia
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs*

Abstract. The primary objective of this presentation is to showcase several recent developments in testing methodologies for change point analysis. We propose employing a novel approach inspired by the concept presented in [1], utilizing different integral transforms. To underscore the real-world significance of the novel tests, we apply them to analyze the latest cryptocurrency data. The financial applications we emphasize are applicable in the context of algorithmic trading of volatile assets.

Keywords: integral transforms; change point; financial markets.

References

- [1] **M. Hušková, S. G. Meintanis** Change Point Analysis based on Empirical Characteristic Functions. *Metrika*, 2006.
- [2] **Ž. Lukić, B. Milošević.** A novel two-sample test within the space of symmetric positive definite matrix distributions and its application in finance. *ArXiv preprint*, 2023.
- [3] **L. Baringhaus, D. Kolbe.** Two-sample tests based on empirical Hankel transforms. *Statistical Papers*, 2015.

Методологија састављања контролних задатака у настави математике кроз примере

Милена Марић

Девета гимназија „Михаило Петровић Алас”
e-mail: milena.maric@deveta.edu.rs

Маја Костадиновић

Девета гимназија „Михаило Петровић Алас”
e-mail: maja.kostadinovic@deveta.edu.rs

Апстракт. У оквиру овог излагања биће представљени кључни аспекти методологије састављања контролних задатака у настави математике с циљем унапређења квалитета образовног процеса. Циљ излагања је идентификовање ефикасних приступа и смерница које наставници математике могу применити како би створили релевантне, изазовне и педагошки оправдане контролне задатке, који прате ишодне плана наставе и учења и који су креирани од задатака основног, средњег и напредног нивоа.

У оквиру рада посвећује се пажња креирању задатака који нису шаблонски, и на тај начин подстиче наставнике да укључе елементе иновације у процес састављања контролних задатака. Иако су шаблонски задаци корисни и свакако их треба презентовати ученицима код основног концепта наставне теме, предлаже се и да задаци буду дизајнирани тако да подстичу ученичку креативност и дубље разумевање математичких концепата. На тај начин се долази до задатака који су изазовни и пружају ученицима могућност да развијају критичко расуђивање и примењују математичке вештине у различитим животним контекстима.

Кључне речи: настава математике, контролна вежба, дизајнирање задатака, нивои задатака

Библиографија

- [1] **В.Т. Богославов** Збирка решених задатака из математике за трећи разред, Завод за уџбенике и наставна средства. *Београд*, 2013.
- [2] **Ж. Ивановић, О. Огњановић** МАТЕМАТИКА 3 – Збирка задатака и тестова за трећи разред гимназија и техничких школа. *Круг, Београд*, 2021.
- [3] **В. Стојановић, Н. Ђирић** Математископ 5 – Збирка задатака за трећи разред средњих школа. *Математископ, Београд*, 1999.
- [4] **В. Стојановић** Троугао плус, 7 Лектира математископа. *Математископ, Београд*, 2005.
- [5] **Ј.Кечкић** МАТЕМАТИКА са збирком задатака за трећи разред средње школе, за гимназију : општу и природно-математички мер и за природно – математичко подручје рада. *Завод за уџбенике, Београд*, 2022.
- [6] **З. Шишкић, А. Цопић, Р. Калазић, С.Лукач, К.Ј. Пензар** МАТЕМАТИКА 2 - уџбеник за други разред гимназија и средњих струковних школа. *Профил Клетт д.о.о, Загреб*, 2020.
- [7] **З. Шишкић, А. Цопић, Р. Калазић, С.Лукач, К.Ј. Пензар** Математика, приручник за припрему испита за државној матуру, основна и виша разина. *Профил Клетт д.о.о, Загреб*, 2011.
- [8] **Б. Дакић**, Математика 2, Збирка задатака за 2. разред гимназије. *Елементи, Загреб*, 2003.

Hardy and Littlewood theorem in a general setting

Marijan Marković

University of Montenegro, Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica, Montenegro
e-mail: marijanmarkovic@gmail.com

Abstract.

Let $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ be the unit disk and let $\alpha \in (0, 1]$. A Hardy–Littlewood theorem says that an analytic function f on \mathbb{D} satisfies

$$|f'(z)| \leq C(1 - |z|)^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

if and only if it satisfies the Hölder condition

$$|f(z) - f(w)| \leq C'|z - w|^\alpha, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

where C and C' are constants (may depend only on the function f). Moreover, if f satisfies the second condition, then $C \leq C'$; if f satisfies the first condition, then $C' \leq \alpha^{-1}AC$, where A is an absolute constant.

We consider this result for the class of regularly oscillating mappings between metric spaces.

Keywords: Hardy and Littlewood, regularly oscillating mappings; analytic functions, the unit disc, the distance function.

References

- [1] **F.W. Gehring, O. Martio.** Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 1985, 10, 203 - 219.
- [2] **M. Marković.** Representations for the Bloch type semi-norm of Fréchet differentiable mappings. *Journal of Geometric Analysis*, 2021, 31, 7947 - 7967.
- [3] **H. Stegbuchner.** On some extensions of a theorem of Hardy and Littlewood. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 1982, 7, 113 - 117.

The Constraint Satisfaction Problem Dichotomy Conjecture: History, Proofs and Generalizations

Petar Marković

*Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad, Serbia
e-mail: pera@dmf.uns.ac.rs*

Abstract. The Constraint Satisfaction Problem was defined in the 1990s inspired by certain topics in Descriptive Complexity. At that time, the Dichotomy Conjecture on the complexity of the Constraint Satisfaction Problem was posed. The Dichotomy Conjecture was proved a quarter of a century later, in 2017, independently by Andrei Bulatov and Dmitriy Zhuk. In this lecture I will define the Constraint Satisfaction Problem, motivate the Dichotomy Conjecture, and survey the main ideas in the proofs by Bulatov and Zhuk. In the final part, I will briefly describe the two most popular generalizations which are a focus of research by numerous teams since the proof of the Dichotomy Conjecture, introduce a third possibility of generalizing the Dichotomy Conjecture and argue why this third topic should also be in the focus of research.

Hyperbolic, Euclidean, Minkowski geometry and theory of special relativity

Miodrag Mateljević

*Serbian Academy of Sciences and Arts / University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: miodrag@webmail.matf.bg.ac.rs*

Abstract. We give a brief overview of the geometries mentioned in the title. In particular we outline short proof of The Pythagorean (or Pythagoras') Theorem based on the statement which are equivalent to The Parallel Postulate and as an application we derive Lorentz transformation.

Although most physicists accept the theory of relativity, there is a significant number of scientists who criticize this theory. Bearing these criticisms in mind, we try to make a mathematical model motivated by the special theory of relativity, in particular without using the second postulate of Einstein, and to consider it. First principle of relativity (without the second) along with homogeneity of space and time and isotropy of space naturally gives rise to two possibilities, either we have Galilean transformation where space and time is absolute, or general Lorentz Transformation which includes Lorentz Transformation with a boost invariant speed c as the upper limit of all speeds. Most physicists believe that reality corresponds to LT, but pure mathematics from our assumption cannot decide that. Light seems to have supernatural properties (god particle).

Lipschitz Continuity for Harmonic Functions and Solutions of the $\bar{\alpha}$ -Poisson Equation

Miodrag Mateljević

*Serbian Academy of Science and Arts, Kneza Mihaila 35, Belgrade, 11000, Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Nikola Mutavdžić

*Mathematical Institute SANU, Kneza Mihaila 36, Belgrade, 11000, Serbia
e-mail: nikola.math@gmail.com*

Adel Khalfallah

*Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran 31261, Saudi Arabia
e-mail: khelifa@kfupm.edu.sa*

Abstract. In this paper we investigate the solutions of the so-called $\bar{\alpha}$ -Poisson equation in the complex plane. In particular, we will give sufficient conditions for Lipschitz continuity of such solutions. We also review some recently obtained results. As a corollary, we can restate results for harmonic and (p, q) -harmonic functions. The Poisson equation is a fundamental problem in classical literature. For example, the book [1] considers elliptic partial differential equations of the second order, which are uniformly strongly elliptic. Since the operator $\overline{L_\alpha}$ is not uniformly elliptic, we can not apply these classical methods; see for example [2], where the first two authors of this paper showed that the corresponding analogue of the Hopf lemma is false.

Keywords: Poisson's kernel; Green function; harmonic functions; gradient estimate; lipschitz continuity

References

- [1] **Gilbarg, D. ; Trudinger, N.** Elliptic Partial Differential Equation of Second Order, 2nd ed.; *Springer: Berlin, Switzerland, 1983.*
- [2] **Mateljević, M.; Mutavdžić, N.** The Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings and some generalizations. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2022, 45, 3177–3195.

Površina i zapremina - neki interesantni fenomeni

Miodrag Mateljević

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet
Srpska akademija nauka i umetnosti
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs*

Marek Svetlik

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet
e-mail: marek.svetlik@matf.bg.ac.rs*

Miljan Knežević

*Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet
e-mail: miljan.knezevic@matf.bg.ac.rs*

Apstrakt. U ovom izlaganju razmatraćemo pojmove površina figura u ravni i površi u prostoru, kao i zapremina tela u prostoru. Posebno ćemo obraditi površinu mnogougla i kruga, kao i površinu i zapreminu valjka, kupe, lopte i torusa. Videćemo koje se od formula za površine i zapremine mogu izvesti elementarno, a za koje to nije moguće učiniti. Ukazaćemo i na neke interesantne fenomene koji se mogu uočiti prilikom izvođenja odgovarajućih formula. Formulisaćemo izoperimetrijsku nejednakost. Konačno, pokazaćemo i da postoji „telo” koje ima konačnu zapreminu i beskonačnu površinu.

Ključne reči: Površina; zapremina; određeni integral; izoperimetrijska nejednakost.

Примене Јенсенове неједнакости у тригонометрији

Бојана Матић

*Математичка гимназија, Краљице Наталије 37, 11000 Београд
e-mail: bojanamate@gmail.com*

Апстракт. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција. Тада за $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ важи Јенсенова неједнакост

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

На овом предавању приказаћемо неке примене Јенсенове неједнакости у тригонометрији. На пример, показаћемо да ако су α , β и γ углови троугла онда важи неједнакост

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Кључне речи: Јенсенова неједнакост; тригонометријске неједнакости.

Примена диференцијалне приватности на агрегиране временске серије

Кристина Матовић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: pd212013@alas.matf.bg.ac.rs

Бојана Милошевић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: bojana.milosevic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Напредак модерних технологија резултирао је распрострањеном употребом великог броја сензора за прикупљање података, који се потом користе за истраживање широког спектра феномена и формирање многобројних статистика. Централни изазов оваквих система јесте истовремено очување приватности индивидуалног корисника и релевантности објављених статистичких резултата. Концепт диференцијалне приватности, детаљно описан у [1], представља једну од најчешће коришћених метода пертурбације података приликом објављивања агрегираних временских серија с циљем очувања приватности појединца. У овом раду имплементиран је диференцијално приватни алгоритам базиран на дискретној Фуријеовој трансформацији [2] и примењен на временске серије с различитим карактеристикама. Истражен је утицај величине статистичког узорка на очување приватности и употребну вредност података.

Кључне речи: агрегиране временске серије; диференцијална приватност; очување приватности

Библиографија

- [1] **C. Dwork, A.Roth.** The algorithmic foundations of differential privacy. *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, 2014, pp. 211-407.
- [2] **V. Rastogi, S. Nath.** Differentially private aggregation of distributed time-series with transformation and encryption. *Proceedings of the 2010 ACM SIGMOD International Conference on Management*, 2010, pp. 735 - 746.

Strong convergence theorems for general quasi-variational inequalities using high-order approximation methods

Nevena Mijajlović

*Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro
e-mail: nevenami@ucg.ac.me*

Milojica Jaćimović

*Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Podgorica, Montenegro
e-mail: milojica@jacimovic.me*

Abstract. The objective of this paper is to study the convergence of two-step and three-step approximation methods for quasi-variational inequalities in the general case. First, we propose two -step and three-step dynamical system and carry out an asymptotic analysis for the generated trajectories. The explicit time discretization of those systems results into two-step and three-step iterative methods, which we prove to converge also when it is applied to strongly-monotone quasi-variational inequalities. In addition, we show that linear convergence is guaranteed under strong-monotonicity.

Keywords: quasi-variational inequalities; dynamical system, iterative method, convergence.

References

- [1] N. Mijajlović, M. Jaćimović, M. A. Noor. Gradient-type projection methods for quasi-variational inequalities. *Optimization letters*, DOI: 10.1007/s11590-018-1323-1, Vol. 13, Number 8, p. 1885-1896, 2019.
- [2] N. Mijajlović, M. Jaćimović Three-step approximation methods from continuous and discete perspective for quasi-variational inequalities. *Computational mathematics and mathematical physics*, 2023.

Међупредметно повезивање наставних садржаја из математике и физике у раду са ученицима са посебним способностима за математику

Александар Миленковић

*Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
e-mail: aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs*

Немања Момчиловић

*Прва крагујевачка гимназија
e-mail: nemanja.momcilovic@prvagimnazija.edu.rs*

Апстракт. Међупредметно повезивање наставних садржаја је од велике користи за ученике јер са једне стране има потенцијал да позитивно утиче на мотивацију ученика за усвајање нових знања и умења, док применом усвојених знања из математике, на решавање конкретних проблема из других научних области, ученици развијају међупредметне компетенције за решавање проблема. Додатно, адекватним избором одговарајућих проблема наставник пружа могућност ученицима да остваре ис-ходе учења који могу припадати напредном нивоу постигнућа ученика. Међупредметно повезивање наставних садржаја наставник може самостално да планира и реализује, али и са колегом (колегама) који предају друге наставне предмете. Имајући у виду да међупредметно повезивање са другим наставним предметом, у раду са ученицима са посебним способностима може бити компликовано и прилично захтевно за наставника, природно се намеће идеја да је међупредметно повезивање смисленије реализовати у сарадњи са наставником (колегом) који има другачије иницијално образовање. У складу са тиме, осмишљен је и реализован угледни час у Првој крагујевачкој гимназији на тему примене диференцијалног рачуна са ученицима 4. разреда са посебним способностима за математику. Решавањем пажљиво одабраних задатака ученицима је пружена могућност да додатно продубе и прошире знања из физике, али уједно и да стекну увид у примену диференцијалног рачуна за решавање конкретних проблема.

Кључне речи: ученици са посебним способностима за математику; диференцијални рачун; физика; анализа са алгебром.

On self-maps of complex flag manifolds

Matej Milićević

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: matej.milicevic@matf.bg.ac.rs

Marko Radovanović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: marko.radovanovic@matf.bg.ac.rs

Abstract. It was conjectured by Glover and Homer that for a complex flag manifold F every endomorphism $\varphi : H^*(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Z})$ is either a grading endomorphism (Adams map) or a projective endomorphism. In this talk, we present the paper in which we verified this conjecture for a new class of complex flag manifolds, which also captures all cases for which the conjecture was previously proven to be true. Furthermore, this classification of endomorphisms enables us to calculate the noncoincidence index for these manifolds, an invariant that generalizes the fixed-point property.

Keywords: complex flag manifolds; cohomology; fixed-point property.

References

- [1] **M. Milićević, M. Radovanović.** On self-maps of complex flag manifolds. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 2023, 25, Article number: 10
- [2] **H.H. Glover, W.D. Homer.** Self-maps of flag manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1981, 267(2), 423-434

Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane, Part II: Orthogonal Laurent-Gegenbauer systems

Gradimir V. Milovanović

*Serbian Academy of Sciences and Arts
11000 Belgrade, Serbia
e-mail: gvm@mi.sanu.ac.rs*

Abstract. This is a continuation of our lecture given last year at 12th Symposium “Mathematics and Applications”. Let w be a suitable weight function on the open interval $(-1, 1)$, with possible singularities at ± 1 , and which can be extended to a holomorphic function $z \mapsto w(z)$ in the half disc $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.

One kind of nonstandard orthogonality on the semicircle w.r.t. the complex moment functional $\mathcal{L}[z^k] = \mu_k = \int_0^\pi e^{ik\theta} w(e^{i\theta}) d\theta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, can be considered for introducing Laurent orthogonal polynomials (functions) on the semicircle. In particular, in this lecture we consider the Laurent-Gegenbauer systems on the semicircle, including the zero distribution and other properties, as well as the corresponding quadratures of Gaussian type on the Laurent space $\Lambda_{-n+1, n}$.

Numerical simulations: application in galactic dynamics

Stanislav Milošević

*Matematički fakultet, Studentski trg 16, Belgrade
e-mail: stanislav.milosevic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. In the standard hierarchical model large, massive galaxies are formed through mergers of smaller galaxies. In the local universe, we can observe stellar streams, shelves, and other tidal structures formed in galaxy mergers and disruptions of satellite galaxies in the gravitational potential of their hosts. The timescale of these events is usually larger than a billion years. To investigate these events and describe the formation of tidal structures we need to construct N-body models and run numerical simulations. In this work, we present the way of solving the differential equation of motion of the system of particles influenced by the gravitational force and implications for describing galactic dynamics.

Keywords: N-body models, galaxy mergers

References

- [1] Dehnen W., Read J. I. N-body simulations of gravitational dynamics. *European Physics Journal Plus*, 2011, 126, 55.
- [2] Milošević S., Mičić M., Lewis G. F. Metallicity distribution of the progenitor of the Giant Stellar Stream in the Andromeda Galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, 511, 2868
- [3] Springel V., et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 2005, 435, 629

DataFlow SuperComputing for BigData DeepAnalytics

Veljko Milutinović

*Visiting Professor of the University of Belgrade, Faculty of Mathematics, member of MASA
e-mail: vm@etf.rs*

Abstract. This presentation, possibly followed by an on-site or an on-line mini-course or a full-blown course on DataFlow Programming, analyses the essence of DataFlow SuperComputing, defines its advantages and sheds light on the related programming model. The stress is on issues of interest for Applications of Mathematics. The DataFlow paradigm (which itself represents an application of graph theory), compared to the ControlFlow paradigm, offers: (a) Speedups of at least 10x to 100x and sometimes much more (depends on the algorithmic characteristics of the most essential loops and the spatial/temporal characteristics of the Big Data Stream, etc.), (b) Potentials for a better precision (depends on the characteristics of the optimizing compiler and the operating system, etc.), (c) Power reduction of at least 10x (depends on the clock speed and the internal architecture, etc.), and (d) Size reduction of well over 10x (depends on the chip implementation and the packaging technology, etc.). The bigger the data, and the higher the reusability of individual data items (which is typical of ML), the higher the benefits of the dataflow paradigm over the control flow paradigm. However, the programming paradigm is different, and has to be mastered. The ongoing research of the speaker has been highly influenced by four different Nobel Laureates: (a) from Richard Feynman it has been learned that future computing paradigms will be successful only if the amount of data communications is minimized; (b) from Ilya Prigogine it has been learned that the entropy of a computing system could be minimized if spatial and temporal data get decoupled; (c) from Daniel Kahneman it has been learned that the system software should offer options related to approximate computing; and (d) from Tim Hunt it has been learned that the system software should be able to trade latency for precision.

Diferencne jednačine kao jedna klasa dinamičkih jednačina

Tatjana Mirković

*Elektrotehnički fakultet, Beograd
e-mail: tmirkovic75@gmail.com*

Tatjana Bajić

*Matematički fakultet, Beograd
e-mail: ttanja.bajic@gmail.com*

Apstrakt. Poslednje dve decenije počeo je razvoj teorije dinamičkih jednačina na vremenskim skalama, čija primena omogućava istovremeno proučavanje funkcija neprekidnog i diskretnog tipa, a samim tim i istovremeno rešavanje diferencijalnih i diferencnih jednačina. Na taj način se izbegava dvostruko dokazivanje rezultata za oba tipa jednačina. Osim toga, često se ne može dobiti rešenje kako diferencijalnih tako i diferencnih jednačina klasičnim metodima, već se to može uraditi na Time Scale. U ovom radu se razmatra Time Scale na skupu celih brojeva, tj. razmatraju se diferencne jednačine, čija se rešenja dobijaju iz rešenja dinamičkih jednačina u skupu celih brojeva. Dat je pregled po poglavljima linearnih dinamičkih jednačina prvog reda, drugog reda, dinamičkih jednačina sa nekonstantnim koeficijentima, Euler-Cauchy-jeva jednačina, zatim, metod redukcije reda jednačina, faktorizacioni metod.

Ključne reči: Time Scale; dinamičke jednačine; diferencne jednačine.

Bibliografija

- [1] **M. Bohner, A. Peterson.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. *Birkhäuser, Boston*, 2001.
- [2] **M. Bohner, A. Peterson.** Advances in Dynamic Equations on Time Scales. *Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin*, 2003.
- [3] **G. Guseinov.** Integration on time scales. *J. Math. Anal. Appl.* 285(1), 107–127, 2003.

Characteristics of the cost function for a class of single-server queueing systems with k phases of customer service

Stefan Mirchevski

Faculty of Civil Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Blvd. Partizanski Odredi, 1000 Skopje, N. Macedonia

Faculty of Computer Science and Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Rugjer Boshkovikj 16, 1000 Skopje, N. Macedonia

e-mail: stefan_mircevski@outlook.com

Verica Bakeva

Faculty of Computer Science and Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Rugjer Boshkovikj 16, 1000 Skopje, N. Macedonia

e-mail: verica.bakeva@finki.ukim.mk

Abstract. In this paper, we determine the characteristics of the cost function for a class of single-server queueing systems with k phases of customer service under FIFO discipline. In stationary mode, the explicit form of the cost function is obtained and the points at which the function reaches an absolute minimum, are found. In the rest of the paper, additional sensitivity analysis of the parameters in the cost function is done, as well as statistical analysis of the parameters. At the end, some conclusions from the conducted analysis are presented and directions for future research are given through a comparative analysis of different types of service disciplines.

Keywords: queueing system; k phases; cost function; sensitivity analysis.

References

- [1] **A. Bareche, M. D. Aissani.** Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ queueing systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 61 (5), 1296 - 1304.
- [2] **D. P. Heyman.** Optimal operating policies for $M/G/1$ queueing systems. *Operations Research*, 1968, 16 (2), 362 - 382.
- [3] **F. S. Hillier.** Economic models for industrial waiting line problems. *Management Science*, 1963, 10 (1), 119 - 130.
- [4] **O. Ibe.** Markov processes for stochastic modeling. *Elsevier*, 2023.
- [5] **B. Yin, G. Dai, Y. Li, H. Xi.** Sensitivity analysis and estimates of the performance for $M/G/1$ queueing systems. *Performance Evaluation*, 2007, 64 (4), 347 - 356.

Application of mathematics in the study of speed in physics processes and the path to constructivist learning

Milica Mirić

*International Burch University
Francuske revolucije bb, Ilidža 71210, Sarajevo
Bosnia and Herzegovina
e-mail: milica.miric@ibu.edu.ba*

Tatjana Stanković

*Belgrade Business and Arts Academy of Applied Studies
Kraljice Marije 73, 11050, Zvezdara, Belgrade
Serbia
e-mail: tatjana.stankovic@bpa.edu.rs*

Edin Liđan

*International Burch University
Francuske revolucije bb, Ilidža 71210, Sarajevo
Bosnia and Herzegovina
e-mail: edin.lidan@ibu.edu.ba*

Abstract. Every process of learning (whether it is on a conscious or unconscious level) has its purpose that can be achieved only when the participants of this process understand what they have learned and become able to apply gained knowledge in solving new problems. The constructivist way of teaching requires the student's activity in researching problems, asking questions, setting up hypotheses, solving problems, collaborating during the process of teaching and learning not only with teacher but also with other students too. Learning mathematics through a constructivist approach enables students to build conceptual understanding, independently solve problems and draw conclusions about the concepts that are being learned. In this paper we will present examples of the constructivist learning approach to the consideration of the speed problem in physics from a mathematical point of view.

Keywords: constructivist learning; application of mathematics; speed problem.

On the (non-)uniqueness of minimal surfaces in hyperbolic three-space

Andrea Seppi

*Université Grenoble Alpes
e-mail: andrea.seppi@univ-grenoble-alpes.fr*

Abstract. The Asymptotic Plateau Problem in the hyperbolic space is the problem of existence of minimal surfaces with a prescribed Jordan curve as a boundary "at infinity". Since the work of Anderson in the 1980s, it is known to have a solution, which is in general not unique. In this talk, I will present an example of a Jordan curve bounding uncountably many minimal discs. I will also present some criteria for uniqueness. This is joint work with Zheng Huang and Ben Lowe.

Metode konjugovanih gradijenata sa primenama

Miloš Mićović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: milos.micovic@etf.bg.ac.rs*

Željana Torlak

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: tz225003p@student.etf.bg.ac.rs*

Nataša Ćirović

*Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: natasa@etf.bg.ac.rs*

Apstrakt. U ovom radu su opisani i implementirani algoritmi linearnih i nelinearnih metoda konjugovanih gradijenata prema [1] i [2]. Ovi algoritmi se koriste za rešavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina i imaju primenu u mašinskom učenju. Razmatrani su metod najbržeg spusta, metod konjugovanih pravaca uz Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije, metod konjugovanih gradijenata i metod nelinearnih konjugovanih gradijenata sa Njutn-Rafsonovom i Flečer-Rivsovom formulom. Svi pomenuti metodi su implementirani u programskom jeziku Python [3] u okviru Jupyter sveske [4], uz ispis kompletnog postupka. Korišćene su biblioteke NumPy [5] i SymPy [6]. Prikazana je primena pomenutih metoda u rešavanju sistema jednačina $Ax = b$, gde je A kvadratna, simetrična, pozitivno-definitna matrica. Ulazni parametri funkcija u okviru kojih su implementirani metod konjugovanih pravaca i metod konjugovanih gradijenata su matrica A , vektor b i početna vrednost x . Funkcija u okviru koje je implementiran metod najbržeg spusta, pored prethodno navedenih argumenata, sadrži i argument koji određuje maksimalni broj iteracija. Ulazni parametri funkcije u okviru koje je implementiran metod nelinearnih konjugovanih gradijenata jesu nelinearna funkcija koju je potrebno minimizovati, početna vrednost x , maksimalni broj iteracija i maksimalna greška metoda, kao i maksimalni broj iteracija i maksimalna greška Njutn-Rafsonove formule. Kao izlaz ove funkcije ispisuju kompletan postupak rešavanja korak po korak za svaku iteraciju algoritama. Razvijeni apleti su jednostavni za rad i ispisuju celokupan postupak izračunavanja, pa se mogu koristiti u edukativne svrhe.

Ključne reči: metod najbržeg spusta; metod konjugovanih pravaca; metod konjugovanih gradijenata; metod nelinearnih konjugovanih gradijenata; Jupyter sveske.

Bibliografija

- [1] **J. R. Shewchuk.** An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain. *Carnegie Mellon University*, 1994.
- [2] **J. Nocedal, S. J. Wright.** Numerical Optimization. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, 2006.
- [3] **G. Van Rossum, F. L. Drake.** Python 3 Reference Manual. *Scotts Valley, CA: CreateSpace*, 2009.
- [4] **T. Kluyver, B. Ragan-Kelley, F. Pérez, B. Granger, M. Bussonnier, J. Frederic, et al.** Jupyter Notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows. *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*, 2016, 87 - 90.
- [5] **C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, et al.** Array programming with NumPy. *Nature*, 2020, vol. 585, 357 - 362.
- [6] **A. Meurer, C. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, et al.** SymPy: symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, 2017, vol. 3, p. e103.

Cleaning CMB for Precision Cosmology

Aliza Mustafa

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: aliza.mustafa@students.uniroma2.eu*

Marina Migliaccio

*Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Rome, Italy
e-mail: migliaccio@roma2.infn.it*

Alessandro Carones

*Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Rome, Italy
e-mail: alessandro.carones@roma2.infn.it*

Bojan Arbutina

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: arbo@matf.bg.ac.rs*

Marko Stalevski

*Astronomical Observatory, Volgina 7, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: mstalevski@aob.rs*

Simon Prunet

*Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, Bd de l'Observatoire CS 34229,
F 06304 Nice Cedex 4, France
e-mail: simon.prunet@oca.eu*

Abstract. This talk explores the importance of foreground cleaning of Cosmic Microwave Background (CMB) observations to unlock the Universe's secrets. I will specifically focus on the extraction of information from CMB polarization anisotropies, which provide a unique window into the early conditions of the Universe. However, the primordial signal is obscured by polarized emission from our own Galaxy mainly due to synchrotron and thermal dust radiation. Accurate characterization of these emissions requires tight control of complex physics within the Milky Way and upcoming multi-frequency observations will be key to further our understanding of the involved processes.

In this context, I will show that the Internal Linear Combination (ILC) method enables the separation of the CMB signal from foreground contamination with minimal assumptions on their properties. This is an extremely important feature given the uncertainties in the foreground modeling.

Keywords: Cosmic Microwave Background; polarization anisotropies; cleaning techniques; ILC.

References

- [1] **M. Tegmark, G. Efstathiou.** *A method for subtracting foregrounds from multifrequency CMB sky maps.* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 281(4), 1297–1314, August 1996.
- [2] **P. Cabella and M. Kamionkowski.** *Theory of Cosmic Microwave Background Polarization.* 2004.
- [3] **A. Carones, N. Vittorio, M. Migliaccio, D. Marinucci.** *Future challenges in CMB polarization data PhD thesis, PhD Program in Astronomy, Astrophysics and Space Science, University of Rome Tor Vergata, University of Rome Sapienza, INAF - Istituto Nazionale di Astrofisica, 2023.*

An Optimization Approach for Certain Public Blockchain Pool Mining Scenario

Miodrag J. Mihaljević

*Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
e-mail: miodragm@turing.mi.sanu.ac.rs*

Nevena Mijajlović

*School of Sciences, University of Montenegro
e-mail: nevenami@ucg.ac.me*

Abstract. Blockchain technology and its applications are among the hottest contemporary directions with, still, a large number of open challenges. We consider the blockchain pool mining where a pool manager operates an alliance of the miners in order to jointly perform the blockchain consensus protocol and contribute to the blockchain ledger updates. In the considered pool mining scenario the pool manager and the miners have certain opportunities for selection a number of parameters regarding the management and mining scenario, respectively. This talk shows an approach for selection of these parameters in order to optimize the expected gain of the parties that jointly work in the system. In the first part of the talk, the architecture of the considered blockchain system, and the employed consensus protocol are described in a manner suitable for blockchain non-experts. The second part of the talk is dedicated to an approach for optimization of the pool manager and the miners' working strategies in order to perform their missions in the system with a desired gain.

Harnessing Deep Learning for Quasar Light Curve Modeling with QNPpy

Marina S. Pavlović

*Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Kneza Mihaila 36, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: marinap@mi.sanu.ac.rs*

Andjelka Kovačević

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: andjelka.kovacevic@matf.bg.ac.rs*

Dragana Ilić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia

Iva Čvorivić Hajdinjak

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia

Luka Č Popović

Astronomical Observatory, Volgina 7, 11000 Belgrade, Serbia

Saša Simić

Faculty of Science, University of Kragujevac, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac, Serbia

Abstract. Quasar light curves exhibit intrinsic stochastic variability, which in combination with observational technical limitations, such as frequent observational gaps and irregular cadences, creates significant challenges for their analysis. To effectively address these challenges, in order to explore quasar underlying physical processes, the common incorporation of deep learning stands out as a key method for efficiently modeling quasar light curves. Here, we present our Python package, now available as "QNPpy" on the PyPI platform, which represents a groundbreaking tool for modeling quasar light curves using meta-learning algorithms which are called conditional neural processes. We demonstrate the first application of the QNPpy Python package on two case-study samples sourced from the Data Challenge of the LSST AGN Science Collaboration [1] and the GAIA space mission.

Keywords: quasars; time series modeling; computational astronomy; deep learning.

References

- [1] Kovačević, A.B.; Ilić, D.; Popović, L.Č.; Andrić Mitrović, N.; Nikolić, M.; Pavlović, M.S.; Čvorović-Hajdinjak, I.; Knežević, M.; Savić, D.V. Deep Learning of Quasar Lightcurves in the LSST Era. *Universe*, 2023, 9, 287.

Non-ergodicity of the geodesic flow on Cantor tree surfaces

Michael Pandazis

Graduate Center, CUNY 365 Fifth Avenue N.Y., N.Y., 10016
e-mail: mpandazis@gradcenter.cuny.edu

Abstract. A Riemann surface equipped with its conformal hyperbolic metric is parabolic if and only if the geodesic flow on its unit tangent bundle is ergodic. Let X be a Cantor tree or a blooming Cantor tree Riemann surface. Fix a geodesic pants decomposition of X and call the boundary geodesics in the decomposition cuffs. Basmajian, Hakobyan, and Saric proved that if the lengths of cuffs are rapidly converging to zero, then X is parabolic. More recently, Saric proved a slightly slower convergence of lengths of cuffs to zero implies X is not parabolic. In the paper, we interpolate between the two rates of convergence of the cuffs to zero and find that these surfaces are not parabolic, thus completing the picture.

Problem određivanja krivine proizvoljne bilinearne forme na diferencijabilnoj mnogostrukosti

Miloš Z. Petrović

Univerzitet u Nišu, Poljoprivredni fakultet u Kruševcu,
Kosančićeva 4, 37000 Kruševac, Srbija
e-mail: petrovic.milos@ni.ac.rs

Apstrakt. Poznato je da linearna povezanost koja očuvava proizvoljnu bilinearnu formu b na diferencijabilnoj mnogostrukosti M nije jedinstvena. Razmotrićemo na koje sve načine je moguće odrediti takvu povezanost, koja bi se mogla iskoristiti za određivanje krivinskog tenzora [3]. Zatim ćemo dati osvrt na slučaj bilinearne forme $b = g + \omega$, gde je g simetrična i nedegenerativna, a ω je kososimetrična bilinearna forma. Tada se radi u uopštenom Rimanovom prostoru u Ajzenhartovom smislu ($M, b = g + \omega$) i u tom slučaju linearna povezanost se može odrediti tako da zadovoljava uopštenu Kožulovu formulu. Postavlja se pitanje da li bi pored nedegenerisanosti simetrične bilinearne forme g bilo korisno uvesti još neke dodatne pretpostavke za $b = g + \omega$ i kako bi takve pretpostavke uticale na povezanosti i na krivinske tenzore date u radovima [1, 2]?

Ključne reči: bilinearna forma; linearna povezanost; krivinski tenzor; uopšteni Rimanov prostor.

Bibliografija

- [1] Svetislav Minčić. On Ricci type identities in manifolds with non-symmetric affine connection. *Publications De L'Institut Mathématique, Nouvelle série*, (2013), tome 94 (108), 205–217.
- [2] Miloš Z. Petrović. On curvature of a manifold endowed with an arbitrary bilinear form, *Riemannian Geometry and Applications – RIGA 2023*, September 22–24, 2023.
- [3] Mileva Prvanović. Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion (in Russian) *In: Proc. Conf. "150 years of Lobachevski geometry," Kazan 1976, Moscow 1977* pp. 199–205.

With the Chebyshev polynomials through geometric circulant matrices

Marko Pešović

Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
e-mail: mpesovic@grf.bg.ac.rs

Zoran Pucanović

Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
e-mail: pucanovic@grf.bg.ac.rs

Abstract. We will present estimates for spectral norm bounds of the geometric circulant matrices whose entries are the Chebyshev polynomials of the first and the second kind. Some of the obtained results were verified by applying them to some known results on matrices involving various integer sequences, such as Fibonacci, Lucas, Pell and Jacobsthal integer sequences.

Keywords: Chebyshev polynomials, geometric circulant matrix, matrix norms

References

- [1] **T. S. Chihara.** An Introduction to Orthogonal Polynomials. *Gordon and Breach, New York*, 1978.
- [2] **P. J. Davis.** Circulant Matrices. *Wiley, New York*, 1979.
- [3] **J. C. Mason, D. C. Handscomb.** Chebyshev Polynomials. *Chapman and Hall, New York*, 2003.
- [4] **Z. Pucanović, M. Pešović.** Chebyshev polynomials and r -circulant matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 437 (127521)

О нормама k -циркуларних матрица са Лукасовим бројевима

Biljana Radičić

Univerzitet Singidunum, Danijelova 32, 11 010 Beograd i Bulevar Peka Dapčevića 47a, 11 000 Beograd, Srbija
e-mail: bradicic@singidunum.ac.rs

Апстракт. Нeka је k произвољан комплексан број. У овом раду анализирамо k -циркуларне матрице. То су матрице које припадају класи Теплицових матрица које карактерише особина да имају исти елемент дуж главне дијагонале, што важи и за сваку дијагоналну паралелну главној дијагонали. Анализа је посвећена k -циркуларним матрицама са првим редом $(L_0, L_1, \dots, L_{n-1})$, као и k -циркуларним матрицама са првим редом $(\frac{1}{L_0}, \frac{1}{L_1}, \dots, \frac{1}{L_{n-1}})$, где је L_n n -ти Лукасов број, и то нормама (1-норма, ∞ -норма, Еуклидска и спектрална норма) наведених матрица. За неке од наведених норми одређене су горња и доња граница тј. интервал у оквиру којих се може наћи њихова вредност, док су за неке норме одређене њихове тачне вредности. Добijени резултати су илустровани примерима.

Кључне речи: k -циркуларне матрице; Лукасови бројеви; норме матрица.

Библиографија

- [1] **R. E. Cline, R. J. Plemmons, G. Worm.** Generalized inverses of certain Toeplitz matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 1974, 8(1), 25 - 33.
- [2] **R. A. Horn, C. R. Johnson.** Topics in Matrix Analysis. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1991.
- [3] **G. Zielke.** Some remarks on matrix norms, condition numbers, and error estimates for linear equations. *Linear Algebra and its Applications*, 1988, 110, 29 - 41.

A Deep Learning Approach for Understanding Quasar Light Curves in the Legacy Survey of Space and Time

Aman Nadimpalli Raju

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: amannadimpalli.raju@students.uniroma2.eu*

Andjelka Kovačević

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: andjelka.kovacevic@matf.bg.ac.rs*

Francesco Tombesi

*Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Rome, Italy
e-mail: francesco.tombesi@roma2.infn.it*

Dragana Ilić

*Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: dragana.ilic@matf.bg.ac.rs*

Luka Č. Popović

*Astronomical Observatory, Volgina 7, 11000 Belgrade, Serbia
e-mail: lpopovic@aob.rs*

Eric Slezak

*Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, Bd de l'Observatoire, CS 34229,
F-06304 Nice cedex 4, France
e-mail: eric.slezak@oca.eu*

Abstract. We present an upgraded version of the QNP_y algorithm, which is a publicly available algorithm for quasar light curve deep learning modelling. The algorithm is augmented with a procedure for the stratification of quasar light curves based on diverse topological features including changes in gradient, cadence gaps, ridges, etc. By effectively clustering light curves in distinct sets, our QNP_y algorithm could better capture more nuanced behaviors in the quasar light curves.

At the core of this enhancement is the integration of an improved clustering mechanism based on Self Organizing Maps (SOMs). SOMs utilize a competitive unsupervised algorithm for effective dimensionality reduction and clustering, making them well-suited for application on large and uneven astronomical datasets. We present the application of our algorithm to quasar light curves in the LSST AGN Data Challenge and the variability analysis of the detected clusters.

Additionally, we discuss the implementation of Attentive Conditional Neural Processes in our QNP_y code. The addition of attentive mechanisms allows the processes to prioritize temporal connections in the light curve, thus enhancing the capability to model and interpret the complex dynamics of quasar light curves.

Keywords: Quasars; Clustering with Self Organizing Maps; Legacy Survey of Space and Time; Neural Processes

References

- [1] A.B. Kovačević, D. Ilić, L.Č. Popović, N. Andrić Mitrović, M. Nikolić, M.S. Pavlović, I. Čvorović-Hajdinjak, M. Knežević, D.V. Savić. Deep Learning of Quasar Lightcurves in the LSST Era. *Universe*, 2023, 9(6), 287.
- [2] M. Garnelo, D. Rosenbaum, C. Maddison, T. Ramalho, D. Saxton, M. Shanahan, Y.W. Teh, D. Rezende, S.A. Eslami. Conditional neural processes. *In International conference on machine learning* 2018, pp. 1704-1713

Statistical inference of Quasar variability using *dynesty*

Marco Immanuel Rivera

University of Rome Tor Vergata, Italy, and University of Belgrade, Serbia
e-mail: em221104@alas.matf.bg.ac.rs

Andjelka Kovacevic

Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: andjelka.kovacevic@matf.bg.ac.rs

Dragana Ilic

Department of Astronomy, Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: dragana.ilic@matf.bg.ac.rs

Abstract. Time domain variability of quasars provides important insights into the processes occurring in the surrounding environment of active supermassive black holes (SMBH) residing in the quasar's core. It is anticipated that the synergy between large time-domain surveys and upcoming gravitational wave observatories could facilitate the detection of close binary (subparsec) SMBH, even a few years before they merge. Such binary systems are expected to emit a 'tick-tock' electromagnetic signal – a sinusoid with damped amplitude and frequency – which has been elusive to detect. In this context, we experiment with Bayesian modeling of artificially simulated quasar light curves, incorporating various cadences and containing distinct 'tick-tock' signals.

Our statistical inference approach uses nested sampling and Gaussian process regression to construct detailed probabilistic models of quasar variability. By modeling a synthetic light curve that combines red noise with the aforementioned 'tick-tock' signal, we demonstrate the potential for detecting the signatures of close-to-merging binary SMBH. The hyperparameters of a combined kernel are inferred using the *dynesty* algorithm, offering a more accurate fit and a lower marginal log-likelihood than traditional Hamiltonian Monte Carlo (HMC) inference methods.

Keywords: Quasar variability; Nested Sampling; Gaussian Processes

References

- [1] **A. Kovacevic, L. Popovic., A. I. Shapovalova, D. Ilic.** Periodicity in the continua and broad line curves of a quasar E1821+643. *Astrophysics and Space Science*, 2017, 362(2).
- [2] **H. Zhang, Y.-C. Wang, T.-J. Zhang, T. Zhang.** Kernel Selection for Gaussian Process in Cosmology: With Approximate Bayesian Computation Rejection and Nested Sampling. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2023, 266(2), 27.
- [3] **J. S. Speagle.** DYNESTY: a dynamic nested sampling package for estimating Bayesian posteriors and evidences. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2020, 493(3), 3132–3158.

Rana inicijalizacija konteksta Java virtuelne mašine

Ivan Ristović

Matematički fakultet, Beograd
e-mail: ivan.ristovic@math.rs

Apstrakt. Virtuelne mašine su zbog svojih mnogobrojnih prednosti široko rasprostranjen medijum za izvršavanje programa. Na primer, koriste ih neki od najpopularnijih programskih jezika (Java, JavaScript). Za razliku od kompilacije unapred (*AOT*), virtuelne mašine koriste kompilaciju „u trenutku” (*JIT*) [1]. Stoga pokretanje programa zahteva i pokretanje nove instance (*konteksta*) virtuelne mašine, kao i ponovnu inicijalizaciju radnog okvira virtuelne mašine. Na primer, pokretanje Java virtuelne mašine (*JVM*) podrazumeva učitavanje i inicijalizaciju oko hiljadu klasa Java okvira za razvoj (*JDK*) pre klasa samog programa, što povlači nezamislivo vreme inicijalizacije čak i za jednostavne programe.

U ovom izlaganju biće predstavljena implementirana rana inicijalizacija konteksta JVM, omogućena revolucionarnom platformom GraalVM [2] i posebnom implementacijom JVM pod nazivom Espresso [3]. Modifikovan je proces kompilacije virtuelne mašine Espresso dodavanjem podrške za inicijalizaciju konteksta koristeći platformu GraalVM. Implementirano je obogaćivanje konteksta meta-podacima koji se koriste prilikom učitavanja JDK okvira. Takav kontekst se onda koristi kao domaćin za izvršavanje programa, smanjujući vreme inicijalizacije od 24% do 47%, u zavisnosti od verzije specifikacije JVM. Biće prikazani rezultati implementirane rane inicijalizacije konteksta na moderne Java aplikacije, i biće pokazano da ona može doprineti i značajnom smanjenju ukupnog vremena izvršavanja programa.

Ključne reči: Java virtualna mašina; GraalVM; Espresso; Inicijalizacija JVM

Bibliografija

- [1] **IBM.** The JIT compiler. <https://www.ibm.com/docs/en/sdk-java-technology/8?topic=reference-jit-compiler>.
- [2] **GraalVM.** Build faster, smaller, leaner applications <https://www.graalvm.org/>.
- [3] **Espresso.** A meta-circular JVM implementation written in Java. <https://github.com/oracle/graal/tree/master/espresso>.

Vanishing Carleson measures for weighted harmonic mixed-norm spaces

Ivana Savković

*Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka, Bulevar vojvode Stepe Stepanovića 71, Banja Luka
e-mail: ivana.savkovic@mf.unibl.org*

Abstract. We characterize Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ of harmonic functions on smoothly bounded domains in \mathbb{R}^n for a certain range of parameters p, q and α , which is an extension of earlier characterization obtained in [1]. Also, we characterize vanishing Carleson measures for these spaces. We give necessary and sufficient condition on measure μ for the embedding $B_\alpha^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ to be compact, in terms of corresponding averaging function. The talk is based on joint work with Miloš Arsenović.

Keywords: vanishing Carleson measures; weighted mixed norm spaces; harmonic functions.

References

- [1] **I. Savković.** Carleson Measures for Weighted Harmonic Mixed Norm Spaces on Bounded Domains in \mathbb{R}^n . *Czechoslovak Mathematical Journal* 2022, 72, 1205–1216.
- [2] **Z. Hu, X. Lv.** Carleson type measures for harmonic mixed norm spaces with application to Toeplitz operators. *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 2013, 34 (4), 623–638.

Смањивање величине извршиве датотеке компресијом кода

Марко Спасић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: marko.spasic@math.rs

Милена Вујосевић Јаничић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: milena.vujosevic.janicic@math.rs

Апстракт. Један од основних циљева компилатора *GraalVM Native Image* [1] за језике засноване на Јавином бајт коду је ефикасно извршавање Јава апликација у облаку [2]. У оквиру излагања представићемо оптимизацију коју развијамо у оквиру овог компилатора а која има за циљ смањивање величине извршиве датотеке уз минималан утицај на брзину извршавања апликације.

Оптимизација се заснива на опажању да мали проценат укупног кода једне Јава апликације представља суштинску логику апликације и тај део кода се често извршава током животног века апликације, док највећи део кода обрађује специјалне случајеве и грешке и извршава се понекад. Праћењем рада апликације (прикупљањем профила) можемо добити податке о извршавању на основу којих можемо поделити код апликације на код који се често извршава и код који се ретко извршава (хладан код). На основу прикупљених профила, издвајамо хладан код и његове пратеће податке у засебену секцију коју у извршивој датотеци чувамо у компресованом формату. Хладан код ћемо током извршавања апликације по потреби декомпресовати и инсталирати водећи рачуна да то минимално утиче на брзину извршавања програма. На овај начин омогућавамо смањивање укупне величине извршиве датотеке у просеку за 40%. Тиме убрзавамо њено учитавање у меморију, започињање извршавања и пренос преко мреже, што директно утиче и на смањење цене сервиса који се извршавају у облаку.

Кључне речи: Компајлери; Оптимизације; Програмирање у облаку

Библиографија

- [1] **Oracle Labs.** GraalVM Native Image. <https://www.graalvm.org/>. 2023.
- [2] **C. Wimmer, C. Stancu, P. Hofer, V. Jovanovic, P. Wögerer, Peter B, T. Würthinger, et al.** Initialize Once, Start Fast: Application Initialization at Build Time. *In Proceedings of the ACM on Programming Languages., volume 3, issue OOPSLA, ACM Press, 2019, A184.*

Metoda promenljivih okolina za rešavanje jedne varijante problema p -hab maksimalnog pokrivanja

Zorica Stanimirović

*Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd, Srbija
e-mail: zoricast@matf.bg.ac.rs*

Olivera Stancić

*Ekonomski fakultet, Liceja Kneževine Srbije 3, Kragujevac, Srbija
e-mail: olivera.stancic@kg.ac.rs*

Apstrakt. Razmatran je problem p -hab maksimalnog pokrivanja neograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama (engl. *Uncapacitated Single Allocation p -hub Maximal Covering Problem - USA p HMCP*) i binarnim konceptom pokrivanja. Cilj USA p HMCP je određivanje optimalnih lokacija za uspostavljanje tačno p habova, tako da se maksimizuje ukupan protok po svim pokrivenim parovima snabdevač-korisnik. U slučaju binarnog pokrivanja, par korisnik-slabdevač se smatra pokrivenim ukoliko cena transporta od čvora-slabdevača do čvora-korisnika nije veća od unapred zadate maksimalne vrednosti (radijusa pokrivanja). Razvijene su dve varijante opšte metode promenljivih okolina (engl. *General Variable Neighborhood Search - GVNS*) za rešavanje USA p HMCP. Predložene varijante GVNS metode koriste različite procedure u fazi poboljšanja rešenja: sekvencijalnu metodu promenljivog spusta (engl. *Sequential Variable Neighborhood Descent*) i ugnježdenu metodu promenljivog spusta (engl. *Nested Variable Neighborhood Descent*). Uticaj ovih procedura poboljšanja ispitan je kroz testiranja na instancama problema koje uključuju do 200 čvorova. Dobijeni rezultati testiranja obe varijante GVNS metode ukazuju da njihovu efikasnost u pogledu kvaliteta rešenja i brzine izvršavanja, kao i superiornost u odnosu na postojeće metode iz literature.

Ključne reči: problem p -hab maksimalnog pokrivanja; binarno pokrivanje; opšta metoda promenljivih okolina, metoda promenljivog spusta.

Značaj i mogućnosti Chat GPT-a u procesu učenja

Tatjana Stanković

Beogradska akademija poslovnih i umetničkih strukovnih studija
e-mail: tatjana.stankovic@bpa.edu.rs

Bojana Ćendić

Beogradska akademija poslovnih i umetničkih strukovnih studija
e-mail: bojana.cendic@bpa.edu.rs

Apstrakt. Razvoj veštačke inteligencije doveo je do pojave novih alata koji mogu da rešavaju određene matematičke probleme. Jedan od takvih alata je Chat GPT koji kreirao Open AI i koji podržava komunikaciju na najmanje 95 jezika [1]. Ovaj sistem prirodne obrade jezika (NLP) bazira se na modelu dubokog učenja zbog čega njegove performanse zavise od skupa podataka na kojem je treniran i mogu da rezultiraju varijabilitetom dobijenih odgovora u zavisnosti od odabranog jezika komunikacije [1, 2, 3]. U ovom radu proučavan je varijabilitet dobijenih odgovora prilikom određivanja izvoda funkcije u zavisnosti od jezika. Komunikacija se obavljala na pet različitih jezika (na srpskom, engleskom, ruskom, nemačkom i francuskom jeziku), a zbog šire dostupnosti korišćena je verzija Chat GPT 3.5. Rad ukazuje na mogućnost primene veštačke inteligencije u nastavi matematike u cilju ostvarivanja korelacije sa nastavom stranog jezika, a u smeru razvoja međupredmetnih kompetencija učenika (studenata).

Ključne reči: Chat GPT; izvod funkcije; nastava matematike

Bibliografija

- [1] **ChatGPT languages: does it work in other languages?** <https://www.wepc.com/tips/can-chat-gpt-generate-responses-in-multiple-languages-translate/> (pristupljeno 11.11.2023.)
- [2] **J. Deng, Y. Lin.** The Benefits and Challenges of ChatGPT: An Overview. *Frontiers in Computing and Intelligent Systems*, Vol. 2, No. 2, 2022
- [3] **ChatGPT in Different Languages: Unleashing the Power of Multilingual AI** <https://www.chatgptpromptshub.com/chatgpt-in-different-languages-unleashing-the-power-of-multilingual-ai#gsc.tab=0> (pristupljeno 11.11.2023)

Coupon collector problem with universal coupon - properties and some bounds

Bojana Todić

*Faculty of Mathematics University of Belgrade, Studentski trg 16
e-mail: bojana.todic@matf.bg.ac.rs*

Jelena Jocković

*Faculty of Mathematics University of Belgrade, Studentski trg 16
e-mail: jelena.jockovic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. The basic coupon collector problem has many modifications and generalizations. One line of generalizations are obtained by changing the goal of the collection process. Another line of generalizations is obtained by introducing additional coupons with special purposes. We consider a generalization of the coupon collector problem with unequal probabilities, such that there are two additional coupons in the coupon set: one that speeds up the coupon collection process, and the one that slows it down. We derive some upper and lower bounds on the distribution function of the waiting time until a subcollection or a full collection of coupons is sampled.

Keywords: coupon collector problem; waiting time; universal coupon; Schur-convexity; bounds.

Osnovna metoda promenljivih okolina u ulozi rešavanja problema konkurentnosti na tržištu

Jovana Tomić

Narodna banka Srbije, Kralja Petra 12, 11000 Beograd
e-mail: tomićjovana3@gmail.com

Apstrakt. Ukrštanjem znanja iz oblasti teorije igara, heurističkih metoda matematičke optimizacije, ali i ekonomskih postulata moguće je rešiti praktičan problem konkurentnosti na tržištu. U okviru ekonomskih istraživanja opšte je poznato da je konkurencija jedan od osnovnih postulata tržišne ekonomije. Što je konkurencija na tržištu veća, učesnici ulažu više, koriguju cenovnu politiku i krajnjim korisnicima usluge postaju dostupnije.

Ako konkurentnost na tržištu posmatramo kao igru u kojoj određena kompanija želi da postane učesnik na tržištu, Mladenovićeve i Hansenove Osnovna metoda promenljivih okolina može pomoći kompaniji da se odluči koje korake da preduzme kako bi njen uspeh bio zagarantovan. Rešava se specifični lokacijski problem u kojem postoje dve kompanije na tržištu sa željom da uspostave određene objekte, tako da mudro izaberu lokacije i kapacitete navedenih objekata, maksimizujući svoj profit, ali uzimajući u obzir i konkurenciju na tržištu. Metoda promenljivih okolina bazirana je na iterativnom poboljšanju jednog rešenja x i pretraživanju t različitih okolina $N_t(x)$ tog rešenja. Osnovna ideja ovog algoritma jeste sistemska promena unapred definisanih okolina, koje se pretražuju sa ciljem izbegavanja zaglavljivanja algoritma u lokalni optimum.

Ključne reči: osnovna metoda promenljivih okolina; lokacijski problem sa nadmetanjem; teorija igara; memetski algoritam; heuristika.

Bibliografija

- [1] **A. Rahbari, S. Farahmand, M. M. Nasiri, V. Mahmoodian.** A modified genetic algorithm for the capacitated competitive facility location problem with the partial demand satisfaction. *Computers and Industrial Engineering*, 2018.
- [2] **A. Djenić, P. Stanojević, M. Marić, Z. Stanimirović.** Memetic algorithm for solving the multilevel uncapacitated facility location problem. *Informatica* 25.3, 2014, pp. 439–466.
- [3] **N. Mladenović, P. Hansen.** Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research*, 1997, pp. 1097–1100.

Комбинаторика у програмима редовне и додатне наставе математике у школама у Републици Србији

Вељко Ћировић

*Ваљевска гимназија, Академија струковних студија Западна Србија, одсек Ваљево
e-mail: veljko.cirovic@dms.rs*

Апстракт.

Решавање комбинаторних и логичко-комбинаторних задатака у настави математике значајно утиче на развој стваралачког мишљења, систематичности и правилног логичког закључивања код ученика.

Настава математике, што кроз редован школски рад, што кроз квалитетан додатни рад, може значајно да допринесе усвајању комбинаторних концепата, чиме се подстиче развој вештина прављења квалитетних анализа и процена неопходних за живот у савременом друштву.

Теме из области комбинаторике се експлицитно скоро и не изучавају у програму редовне наставе математике у основној школи, док су у наставним програмима математике у средњим школама заступљене. У програмима додатне наставе и припрема за такмичења комбинаторне теме заузимају значајно место.

Уз осврт на најзначајније комбинаторне садржаје заступљене у наставним програмима, биће анализирани и адекватне методе за решавање проблема, погодне за примену у настави.

Кључне речи: комбинаторика; настава; логика.

Библиографија

- [1] **P. Mladenović** *Kombinatorika Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2013.*
- [2] **V. Ćirović** *Logičko kombinatorni zadaci u dodatnoj nastavi matematike 9. stručno metodički skup Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi, Pula, Zbornik radova, 2015, 105-112.*
- [3] **Prosvetni glasnik, Godina LXIX – Broj 4 Pravilnik o planu i programu nastave i učenja za gimnaziju, Beograd, 2020.**

Algebraic features of the means classification

Beata Fałda

*The University College of Applied Sciences in Chełm, Poland
e-mail: beatafalda@gmail.com*

Abstract. When teaching statistics we often refer to several notions of mean, such as arithmetic, geometric, harmonic and power mean. The question appears what is actually a mean? Making use of algebraic classification of basic physical quantities like: road distance, speed and acceleration we will show which mean is proper to each of the mentioned quantity.

Keywords: algebraic mean; geometric mean; harmonic mean.

Auto-Distance Covariance Function for Time Series Analysis

Konstantinos Fokianos

*Department of Mathematics & Statistics, University of Cyprus, PO BOX 20537, 1678 Nicosia, CYPRUS
e-mail: fokianos@ucy.ac.cy*

Abstract. There has been a considerable recent interest in measuring dependence by employing the concept of distance covariance function, a new and appealing measure of dependence for random variables. This tool has been recently extended to time series analysis but since then a limited number of works are discussing its properties. Distance covariance and its normalized form, the so-called distance correlation can identify interesting links among the data, whereas the traditional correlation coefficient cannot unless the data are Gaussian and/or linearly related. We extend the notion of distance covariance to multivariate time series by defining its matrix version. The information contained in this matrix is useful for identifying any possible relationships within and between the time series components. Based on this new concept, we introduce a multivariate Ljung-Box type test statistic with an increasing number of lags, suitable for testing independence.

Keywords: Characteristic function; Correlation; Stationarity; U-statistic; Wild bootstrap.

The Bulgarian experience in international mathematical competitions

Stanislav Harizanov

*Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
“Acad. Georgi Bonchev” Str. Block 8, 1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: sharizanov@math.bas.bg*

Peter Boyvalenkov

*Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
“Acad. Georgi Bonchev” Str. Block 8, 1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: peter@math.bas.bg*

Abstract. Bulgaria has always been among the pioneers regarding foundation and organization of International Mathematical Competitions. It has participated in the all 64 editions of the International Mathematical Olympiad (IMO) so far. Bulgarian students have won 57 golds, 127 silvers, and 119 bronzes, while Bulgaria was twice an organizer. This talk is devoted to the various stages of the Bulgarian IMO team selection and preparation, as well as the additional activities that the Union of Bulgarian Mathematicians (UBM), the Institute of Mathematics and Informatics (IMI-BAS), and the Leaders of the Bulgarian team became engaged with through the years.

One of the key factors for the traditionally solid results of the Bulgarian students is the active role of IMI-BAS, which provides a priceless bridge between high-school math competitions and academia, as well as between problems of Mathematical research and competitions. For more than 50 years, the Bulgarian IMO leader has always been an employee of IMI-BAS. Most of the authors of national competition problems and lecturers at training camps are renowned Bulgarian mathematicians. And vice versa, the last two Bulgarian IMO leaders are now the director of IMI-BAS, respectively the UBM president. This synergy will be also analysed.

Keywords: International Mathematical Competitions; Bulgarian participation; IMI-BAS.

Independence tests for circular data

Marija Cuparić

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: marija.cuparic@matf.bg.ac.rs*

Bruno Ebner

*Karlsruhe Institute of Technology, Germany
e-mail: Bruno.Ebner@kit.edu*

Bojana Milošević

*Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: bojana.milosevic@matf.bg.ac.rs*

Abstract. In many diverse scientific fields, the measurements are directions. In the two-dimensional case, directions can be represented as points on the circumference of a unit circle centered at the origin or as unit vectors connecting the origin to these points, named circular data. The numerical representation of circular data as an angle or a unit vector is not necessarily unique, because of that many of the usual linear techniques and measures are often misleading. In this regard, we propose a new class of tests whose test statistic is the distance correlation coefficient based on energy distance. Also, we propose two generalizations based on kernel functions. For all test statistics, asymptotic properties are obtained and an empirical study is conducted.

Keywords: a -energy; distance correlation; circular data; kernel function.

Poissonove formule za domene u \mathbb{R}^n i granično ponašanje u matematičkoj analizi te simulacija numeričkog rješenja putem Pythona.

Elvir Čajić

*Osnovna škola Prokosovići Lukavac, Ekonomsko-hemijska škola Lukavac, školska 5 75300 Lukavac
e-mail: ecajic86@gmail.com*

Violeta Nikodinović

*Math Teacher at Medical school Stevica Jovanovic Pančevo, Belgrade, Serbia
e-mail: ateloivvioleta@gmail.com*

Apstrakt. Poissonova formula za ograničene domene u \mathbb{R}^n predstavlja ključni alat u matematičkoj analizi i teoriji vjerojatnosti. Ovaj rad istražuje njezinu primjenu u analizi graničnog ponašanja funkcija unutar definiranih domena. Implementacija numeričkih metoda u Pythonu omogućuje simulaciju rješenja, što pruža uvid u kompleksna matematička pitanja. Ovaj rad se fokusira na primjenu Poissonove formule u matematičkoj analizi i teoriji vjerojatnosti, posebno kada je riječ o ograničenim domenama u višedimenzijском prostoru \mathbb{R}^n . Poissonova formula je ključni alat koji omogućuje proučavanje vjerojatnosti događaja u takvim ograničenim područjima. Specifično, istraživanje se usmjerava na analizu graničnog ponašanja funkcija unutar jasno definiranih domena pomoću Poissonove formule. Kroz korištenje numeričkih metoda implementiranih u programskom jeziku Python, rad omogućuje simulaciju rješenja. Ova simulacija pruža dublji uvid u kompleksna matematička pitanja koja se pojavljuju u kontekstu ograničenih domena u višedimenzijском prostoru. Implementacija numeričkih metoda u Pythonu dodatno olakšava analizu i istraživanje, omogućujući pristup rješenjima na način koji olakšava razumijevanje i interpretaciju rezultata.

Ključne reči: Poissonova formula \mathbb{R}^n , ograničene domene, numerička simulacija, Python.

Bibliografija

- [1] Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [2] Strang, G., & Fix, G. J. (2008). *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press.
- [3] Quarteroni, A., Saleri, F., & Gervasio, P. (2008). *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Springer.
- [4] Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [5] LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM.

Uloga matematičkog modela u simulacijskom prelazu sa 5g na 6g mrežu

Elvir Čajić

Osnovna škola Prokosovići Lukavac, Ekonomsko-hemijska škola Lukavac, školska 5 75300 Lukavac
e-mail: ecajic86@gmail.com

Sead Rešić

Prirodno matematički fakultet Tuzla, 75000 Tuzla, Univerzitetska 6
e-mail: sresic@gmail.com

Apstrakt. U ovom radu istražujemo ključnu ulogu matematičkih modela u simulaciji tranzicije između 5G i 6G mreža. Fokusiramo se na razvoj i primenu matematičkih modela kako bismo bolje razumeli performanse, efikasnost i izazove povezane sa ovim evolutivnim korakom u bežičnim komunikacijama. Kroz detaljnu analizu, identifikujemo ključne parametre i promenljive koje utiču na prelazak između ovih generacija mreža. Poseban naglasak stavljen je na optimizaciju resursa, latenciju i kapacitet mreže uz pomoć matematičkih alata. Ova istraživanja doprinose boljem razumevanju kako matematički modeli mogu unaprediti proces implementacije 6G mreža. U radu takođe istražujemo važnost validacije matematičkih modela kroz stvarne simulacije kako bismo potvrdili njihovu tačnost i prediktivnu moć u realnim uslovima. Proučavamo kako ovi modeli mogu efikasno predviđati ponašanje mreže u različitim scenarijima opterećenja i promenljivim okolnostima. Takođe istražujemo adaptivne strategije koje se mogu implementirati pomoću matematičkih modela radi optimizacije mrežnih performansi tokom dinamičnih uslova. Kroz sve ovo, cilj nam je pružiti dublje uvide u ulogu matematičkih modela u olakšavanju bezbedne, efikasne i brze tranzicije ka 6G mrežama.

Ključne reči: 5g/6g, matematički modeli, simulacija, bežične komunikacije, optimizacija mrežnih resursa.

Bibliografija

- [1] Andrews, J. G., Buzzi, S., Choi, W., Hanly, S. V., Lozano, A., Soong, A. C. K., & Zhang, J. C. (2014). What will 5G be? *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 32(6), 1065-1082.
- [2] Rappaport, T. S., Xing, Y., Kanhere, O., & Ju, S. (2018). Overview of millimeter wave communications for fifth-generation (5G) wireless networks—with a focus on propagation models. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 65(12), 6213-6230.
- [3] Lu, W., Li, H., & Wu, J. (2015). 5G wireless: A comprehensive introduction. Cambridge University Press.
- [4] Saad, W., Bennis, M., Chen, M., Han, Z., Hjørungnes, A., & Debbah, M. (2019). A vision of 6G wireless systems: Applications, trends, technologies, and open research problems. *IEEE Network*, 34(3), 134-142.

Компаративна анализа алгоритама обиласка графова контроле тока програма

Милан Чугуровић

Математички факултет, Београд, e-mail: milan.cugurovic@matf.bg.ac.rs

Иван Ристовић

Математички факултет, Београд, e-mail: ivan.ristic@matf.bg.ac.rs

Страхиња Станојевић

Математички факултет, Београд, e-mail: strahinja.stanojevic@matf.bg.ac.rs

Марко Спасић

Математички факултет, Београд, e-mail: marko.spasic@matf.bg.ac.rs

Весна Маринковић

Математички факултет, Београд, e-mail: vesna.marinkovic@matf.bg.ac.rs

Милена Вујосевић Јаничић

Математички факултет, Београд, e-mail: milena.vujosevic.janicic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Алгоритми обиласка графа у ширину (*BFS*) и дубину (*DFS*) раде у линеарној временској сложености $O(|V| + |E|)$, где је са V означен скуп чворова а са E скуп грана графа. Међутим, конкретно време извршавања, као и додатни меморијски простор који алгоритми *BFS* и *DFS* захтевају се могу разликовати. Како компилатори обилазе велики број графова контроле тока приликом процеса превођења, одабир адекватног алгорита обиласка ових графова може убрзати време превођења.

У овом раду биће приказани резултати анализе понашања алгоритама обиласка графова контроле тока изабраних референтних програма [1, 2] писаних на различитим програмским језицима (Јава и Скала). За добијање графова је искоришћен компилатор *Graal* [3]. Резултати показују да са порастом броја чворова у графу расте и разлика искоришћености меморије ова два алгорита, где алгоритам *BFS* троши и до 60% мање меморије него алгоритам *DFS*. Сличан тренд уочен је и приликом мерења времена извршавања алгоритама, где алгоритам *BFS* у просеку остварује 50% боље перформансе у поређењу са алгоритмом *DFS*. Додатно, у овом раду идентификовали смо и графове на којима је извршавање алгорита *DFS* и до 50% брже него извршавање алгорита *BFS*, што отвара простор за конструисање ефикаснијег алгорита обиласка графова контроле тока програма, тј. алгорита који на основу локалних карактеристика графа одлучује на који начин најефикасније да настави обилазак.

Кључне речи: Компилатори; Компилатор *Graal*; Алгоритми обиласка графова; Граф контроле тока;

Библиографија

- [1] **A. Prokopec, et al.** Renaissance: A modern benchmark suite for parallel applications on the JVM. *In Proceedings Companion of the 2019 ACM SIGPLAN International Conference on Systems, Programming, Languages, and Applications: Software for Humanity*, 2019. pp. 11-12.
- [2] **S. M. Blackburn, R. Garner, C. Hoffmann, et al.** The DaCapo benchmarks: Java benchmarking development and analysis. *OOPSLA* (2006): 169-190. ACM.
- [3] **C. Wimmer, et al.** Initialize once, start fast: application initialization at build time. *Proceedings of the ACM on Programming Languages* 3. *OOPSLA* (2019): 1-29.

A parametrization of finite area holomorphic quadratic differentials on infinite Riemann surfaces

Dragomir Šarić

*The Graduate Center and Queens College, City University of New York
e-mail: dragomir.saric@qc.cuny.edu*

Abstract.

A Riemann surface X is *infinite* if its fundamental group is not finitely generated. A fundamental object in the study of infinite Riemann surfaces and their Teichmüller spaces are finite area holomorphic quadratic differentials. We obtained that the Brownian motion on a Riemann surface X is recurrent iff almost every horizontal leaf of every finite area holomorphic quadratic differential is recurrent. Moreover, when X satisfies the above, we proved that the single-cylinder holomorphic quadratic differentials (Jenkins-Strebel differentials) are dense among all quadratic differentials and that the Teichmüller metric on the Teichmüller space $T(X)$ of X is given in terms of the extremal lengths of simple closed curves (Kerckhoff's formula).

In this talk, we will describe a parametrization of the space of finite area holomorphic quadratic differentials in terms of the weights on train tracks. As an application, we will prove that the Brownian motion on a Riemann surface with bounded pants decomposition and an at most countably many topological ends is recurrent.

Keywords: Riemann surface, Jenkins-Strebel differentials, Teichmüller metric, Brownian motion

References

- [1] D. Šarić Quadratic differentials and foliations on infinite Riemann surfaces, *on Arxiv*, to appear in Duke Math. Journal.
- [2] D. Šarić The heights theorem for infinite surfaces, *Geom. Dedicata* 216 (2022), no. 3, Paper No. 33, 23 pp.

Nejednakosti u geometriji

Aleksandar Šebeković

*Državni univerzitet u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9, Novi Pazar, Srbija
e-mail: asebekovic@np.ac.rs*

Enes Kačapor

*Državni univerzitet u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9, Novi Pazar, Srbija
e-mail: ekacapor@np.ac.rs*

Apstrakt. Zadaci iz geometrije vrlo često predstavljaju veliki problem, kako u nastavi matematike, tako i na takmičenjima različitih nivoa. U ovom radu dajemo pregled nekih neobičnih planimetrijskih i stereometrijskih nejednakosti, kao i mogućnosti njihovih primena za rešavanje raznih zadataka iz geometrije.

Ključne reči: geometrija; planimetrija; stereometrija.

Bibliografija

- [1] **M. Prvanović.** Osnovi geometrije. *Građevinska knjiga*, 1987.
- [2] **R. Tošić, V. Petrović.** Problemi iz geometrije – metodička zbirka zadataka. *Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu*, 1995.
- [3] **M. Petrović.** Stereometrijske nejednačine. *Zbornik radova Matematičkog instituta SAN*, 1953, 3, pp. 1–4.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ТРИНАЕСТИ СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”
НАЦИОНАЛНИ СКУП СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

Програм првог дана Симпозијума одржава се у свечаној Професорској сали Економског факултета Универзитета у Београду,
Каменичка 6

Програм другог дана Симпозијума одржава се у просторијама
Математичког факултета,
Студентски трг 16

ПРОГРАМ

1. ДАН, ПЕТАК 1. ДЕЦЕМБАР 2023.

10:00 – 12:05, Професорска сала Економског факултета

10:00 – 10:20
Отварање скупа: Зоран Ракић , декан Математичког факултета Универзитета у Београду Бранислав Боричић , проректор Универзитета у Београду Миодраг Матељевић , председник програмског одбора, академик САНУ
10:20 – 10:55
Miodrag Mateljević , Serbian Academy of Sciences and Arts / University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<i>“Hyperbolic, Euclidean, Minkowski geometry and theory of special relativity”</i>
10:55 – 11:30 (online)
Victor Buchstaber , Higher School of Economics, Moscow / Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia Andrei Vesnin , Tomsk State University, Tomsk / Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
<i>“Cyclically presented groups and n-valued groups”</i>
11:30 – 12:05
Miodrag Mihaljević , Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts Nevena Mijajlović , Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro
<i>“An Optimization Approach for Certain Public Blockchain Pool Mining Scenario”</i>

Пауза за кафу и освежење 12:05 – 12:30

12:30 – 14:00, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Милош Арсенић

12:30 – 13:00 (online)
Gradimir V. Milovanović , Serbian Academy of Sciences and Arts
<u>“Orthogonality on the unit semicircle in the complex plane, Part II: Orthogonal Laurent-Gegenbauer systems”</u>
13:00 – 13:30 (online)
Luigi D’Onofrio , University of Napoli "Parthenope", Italia
<u>“ON BV homeomorphisms”</u>
13:30 – 14:00 (online)
Andrea Seppi , Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, France
<u>“On the (non-)uniqueness of minimal surfaces in hyperbolic three-space”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:00 – 14:15

14:15 – 15:45, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Горан Ђанковић

14:15 – 14:45 (online)
Dragomir Šarić , The Graduate Center and Queens College, The City University of New York (CUNY), USA
<u>“A parametrization of finite area holomorphic quadratic differentials on infinite Riemann surfaces”</u>
14:45 – 15:15
David Kalaj , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro
<u>“Contraction property of certain classes of log-M-subharmonic functions in the unit ball”</u>
15:15 – 15:45
Ђорђе Баралић , Математички институт САНУ Владимир Божовић , Универзитет Црне Горе Никола Радојичић , Природно-математички факултет у Подгорици
<u>„Папусови и Штајнерови ланци са заједничким кругом”</u>

Пауза за кафу и освежење 15:45 – 16:00

16:00 – 17:00, Професорска сала Економског факултета

Председавајући: Бојана Милошевић

16:00 – 16:30
Konstantinos Fokianos , Department of Mathematics & Statistics, University of Cyprus, Cyprus
<u>“Auto-Distance Covariance Function for Time Series Analysis”</u>
16:30 – 17:00
Veljko Milutinović , Visiting Professor of the University of Belgrade, Faculty of Mathematics, member of MASA
<u>“DataFlow SuperComputing for BigData DeepAnalytics”</u>

17:00 Коктел

2. ДАН, СУБОТА 2. ДЕЦЕМБАР 2023.

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
10:00 – 16:40 САТИ, САЛА 718/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Давид Калај

10:00 – 10:30
Marijan Marković , Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro <i><u>“Hardy and Littlewood theorem in a general setting”</u></i>
10:30 – 10:50 (online)
Oleksandr Dovahopiatyi , Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine Evgeny Sevost’yanov , Zhytomyr Ivan Franko State University / Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Slov’yans’k, Ukraine <i><u>“On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization”</u></i>
10:50 – 11:10
Jelena Gajić , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka <i><u>“Schwarz-Pick lemma for (α, β)-harmonic functions in the unit disc”</u></i>
11:10 – 11:30 (online)
Adel Khalfallah , Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia Miodrag Mateljević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics / Serbian Academy of Sciences and Arts <i><u>“Norm estimates of the first partial derivatives of generalized harmonic functions”</u></i>
11:30 – 11:50 (online)
Józef Zając , The University College of Applied Sciences in Chełm, Poland <i><u>“Harmonic mappings in technical designs”</u></i>
11:50 – 12:10
Anton Gjokaj , Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro <i><u>“Holder and Lipschitz continuity of quasiconformal harmonic mappings in space”</u></i>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Миљан Кнежевић

12:30 – 12:50
Petar Marković , Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
<u>“The Constraint Satisfaction Problem Dichotomy Conjecture: History, Proofs and Generalizations”</u>
12:50 – 13:10
Nevena Mijajlović , Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro Milojica Jaćimović , Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Podgorica, Montenegro
<u>“Strong convergence theorems for general quasi-variational inequalities using high-order approximation methods”</u>
13:10 – 13:30
Ivan Limonchenko , Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
<u>“Polyhedral products: new results, problems, and applications”</u>
13:30 – 13:50
Marko Pešović , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering Zoran Pucanović , University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering
<u>“With the Chebyshev polynomials through geometric circulant matrices”</u>
13:50 – 14:10
Драган Ђокић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Закон триструког реципроцитета за твистован други момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима”</u>
14:10 – 14:30
Илија Врећца , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“An introduction to sumsets”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 16:40

Председавајући: Маријан Марковић

15:00 – 15:20
Miodrag Mateljević , Serbian Academy of Sciences and Arts Nikola Mutavdžić , Mathematical Institute SANU Adel Khalfallah , Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Saudi Arabia
<u>“Lipschitz Continuity for Harmonic Functions and Solutions of the $\bar{\alpha}$-Poisson Equation”</u>
15:20 – 15:40 (online)
Michael Pandazis , Graduate Center, The City University of New York (CUNY), USA
<u>“Non-ergodicity of the geodesic flow on Cantor tree surfaces”</u>
15:40 – 16:00
Ivana Savković , Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka
<u>“Vanishing Carleson measures for weighted harmonic mixed-norm spaces”</u>
16:00 – 16:20
Miloš Arsenović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Ivana Savković , Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka
<u>“Bounded and Compact Toeplitz operators on Harmonic Mixed-Norm Spaces”</u>
16:20 – 16:40
Катарина Лукић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„О постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе”</u>

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
15:00 – 16:40 САТИ, САЛА БИМ/IV

Председавајући: Јелена Катић

15:00 – 15:20
Милош З. Петровић , Универзитет у Нишу, Пољопривредни факултет у Крушевцу <u>„Проблем одређивања кривине произвољне билинеарне форме на диференцијабилној многострукости”</u>
15:20 – 15:40
Maša Đorić , Mathematical Institute SANU Jelena Katić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Војана Lasković <u>“On polynomial entropy of induced maps on symmetric products”</u>
15:40 – 16:00 (online)
Beata Falda , The University College of Applied Sciences in Chełm, Poland <u>“Algebraic features of the means classification”</u>
16:00 – 16:20
Биљана Радичић , Универзитет Сингидунум <u>„О нормама k-циркуларних матрица са Лукасовим бројевима”</u>
16:20 – 16:40
Matej Milićević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Marko Radovanović , University of Belgrade, Faculty of Mathematics <u>“On self-maps of complex flag manifolds”</u>

I СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ ДАНАС
10:00 – 16:40 САТИ, САЛА РЛАБ/IV

Први део: 10:00 – 12:10

Председавајући: Сана Стојановић Ђурђевић

10:00 – 10:25
Зорица Станимировић, Универзитет у Београду, Математички факултет Оливера Станчић, Универзитет у Крагујевцу, Економски факултет
<u>„Метода променљивих околина за решавање једне варијанте проблема р-хаб максималног покривања”</u>
10:25 – 10:50
Dragana Pić, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Anđelka B. Kovačević, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Luka Č. Popović, Astronomical Observatory Belgrade / University of Belgrade, Faculty of Mathematics Maša Lakićević, Astronomical Observatory Belgrade
<u>“Bringing new dimensions to active galactic nuclei (AGN) studies with the Legacy Survey of Space and Time (LSST)”</u>
10:50 – 11:10
Stanislav Milošević, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Numerical simulations: application in galactic dynamics”</u>
11:10 – 11:30
Милан Банковић, Универзитет у Београду, Математички факултет Весна Маринковић, Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Аутоматско решавање конструктивних проблема у геометрији”</u>
11:30 – 11:50
Јована Томић, Народна банка Србије
<u>„Основна метода променљивих околина у улози решавања проблема конкурентности на тржишту”</u>
11:50 – 12:10
Милан Чугуровић, Иван Ристовић, Страхиња Станојевић, Марко Спасић, Весна Маринковић, Милена Вујошевић Јаничић: Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Компаративна анализа алгоритама обиласка графова контроле тока”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Марко Обрадовић

12:30 – 12:50
Marija Cuparić, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Bruno Ebner, Karlsruhe Institute of Technology, Germany Војана Милошевић, Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>“Independence tests for circular data”</u>

12:50 – 13:10
Radoslav Galić , Elektrotehnički fakultet Osijek Elvir Čajić , Osnovna škola Prokosovići Lukavac / Ekonomsko-hemijska škola Lukavac Zvezdan Stojanović , Evropski Univerzitet Brčko Distrikt Dario Galić , Elektrotehnički fakultet Osijek
<u>„Stohastičke metode u veštačkoj inteligenciji”</u>
13:10 – 13:30
Bojana Todić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Jelena Jocković , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Coupon collector problem with universal coupon - properties and some bounds”</u>
13:30 – 13:50
Кристина Матовић , Универзитет у Београду, Математички факултет Бојана Милошевић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Примена диференцијалне приватности на агрегиране временске серије”</u>
13:50 – 14:10
Danijel Aleksić , University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences / University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“U-statistics-based approach for testing the MCAR assumption”</u>
14:10 – 14:30
Žikica Lukić , University of Belgrade, Faculty of Mathematics Bojana Milošević , University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“On Recent Developments in Change Point Analysis using Integral Transforms”</u>

ПАУЗА за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 16:40

Председавајући: Зорица Дражић

15:00 – 15:20
Кристина Костић , Универзитет у Београду, Математички факултет Тамара Коледин , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Зоран Станић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„GraphEbra - интерактивна, кориснички оријентисана, веб апликација за рад са графовима”</u>
15:20 – 15:40
Марко Спасић , Универзитет у Београду, Математички факултет Милена Вујошевић Јаничић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Смањивање величине извршиве датотеке компресијом кода”</u>
15:40 – 16:00
Атиф Авдовић , Департман за природно-математичке науке, Државни универзитет у Новом Пазару Ерсин Гилић , Департман за природно-математичке науке, Државни универзитет у Новом Пазару Зоран Видовић , Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача
<u>„Методички приступи интерпретације p-вредности статистичких тестова”</u>
16:00 – 16:20
Иван Ристовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Рана иницијализација контекста Јава виртуелне машине”</u>
16:20 – 16:40
Elvir Čajić , Osnovna škola Prokosovići Lukavac / Ekonomsko-hemijska škola Lukavac Sead Rešić , Prirodno matematički fakultet Tuzla, Univerzitet u Tuzli
<u>„Uloga matematičkog modela u simulacijskom prelazu sa 5g na 6g mrežu”</u>

II СЕКЦИЈА: МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА У ОБРАЗОВАЊУ

10:00 – 17:00 САТИ, САЛА 706/IV

Први део: 10:00 – 12:00

Председавајући: Мирослав Марић

10:00 – 11:00
Миодраг Матељевић , Универзитет у Београду, Математички факултет / Српска академија наука и уметности Марек Светлик , Универзитет у Београду, Математички факултет Миљан Кнежевић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Површина и запремина - неки интересантни феномени”</u>
11:00 – 11:30
Stanislav Harizanov , Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria Peter Boyvalenkov , Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria
<u>“The Bulgarian experience in international mathematical competitions”</u>
11:30 – 12:00
Nives Baranović , Faculty of Humanities and Social Sciences in Split, Croatia Jasmina Milinković , University of Belgrade, Faculty of Education
<u>“The role of open-ended tasks in learning and teaching mathematics”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:00 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Небојша Икодиновић

12:30 – 12:50
Мирјана Катић , Математичка гимназија, Београд
<u>„Међународно такмичење Stemco (држава организатор Сингапур)”</u>
12:50 – 13:10
Владимир Балтић , Математичка гимназија, Београд / ВИШЕР, Београд
<u>„Полиноми у основној и средњој школи - методички приступ”</u>
13:10 – 13:30
Војислав Андрић , Математички клуб „Диофант” Ваљево
<u>„Онлајн додатна настава математике”</u>
13:30 – 13:50
Радослав Божић , Учитељски факултет, Универзитет Едуконс, Сремска Каменица / Гимназија „Светозар Марковић”, Нови Сад
<u>„Проблеми површине и запремине у Геогбра окружењу”</u>
13:50 – 14:10
Милена Марић , Девета гимназија "Михаило Петровић Алас", Нови Београд Маја Костадиновић , Девета гимназија "Михаило Петровић Алас", Нови Београд
<u>„Методологија састављања контролних задатака у настави математике кроз примере”</u>

14:10 – 14:30
Damir Bajrić, Alma Šehanović: Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla Irma Ibrišimović, Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet Julija Šćekić, Univerzitet u Beogradu, AGRIF Valentina Banović Klisara, Osnovna škola "Vuk Karadžić" Novi Grad
<u>„Photomath i ChatGPT – primjeri netačnih rješenja”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00

Трећи део: 15:00 – 17:00

Председавајући: Радослав Божић

15:00 – 15:20
Вељко Ћировић, Ваљевска гимназија / Академија струковних студија Западна Србија, одсек Ваљево
<u>„Комбинаторика у програмима редовне и додатне наставе математике у школама у Републици Србији”</u>
15:20 – 15:40
Емир Зогић, Државни универзитет у Новом Пазару Диана Долићанин Ђекић, Факултет техничких наука Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици Един Глогић, Државни универзитет у Новом Пазару
<u>„Примена теорије графова у решавању логичко-комбинаторних задатака”</u>
15:40 – 16:00
Александар Шебековић, Државни универзитет у Новом Пазару Енес Качапор, Државни универзитет у Новом Пазару
<u>„Неједнакости у геометрији”</u>
16:00 – 16:20
Александар Миленковић, Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет Немања Момчиловић, Прва крагујевачка гимназија
<u>„Међупредметно повезивање наставних садржаја из математике и физике у раду са ученицима са посебним способностима за математику”</u>
16:20 – 16:40
Татјана Станковић, Београдска академија пословних и уметничких струковних студија Бојана Ђендић, Београдска академија пословних и уметничких струковних студија
<u>„Значај и могућности Chat GPT-а у процесу учења”</u>
16:40 – 17:00
Milica Mirić, International Burch University, Sarajevo Tatjana Stanković, Belgrade Business and Arts Academy of Applied Studies Edin Lidan, International Burch University, Sarajevo
<u>„Application of mathematics in the study of speed in physics processes and the path to constructivist learning”</u>

II SEKCIJA: MATEMATIKA I INFORMATIKA U OBRAZOVANJU
15:00 – 17:00 SATI, SALA 830/V

Председавајући: Милена Марић

15:00 – 15:20
Бојана Матић , Математичка гимназија, Београд
<u><i>„Примене Јенсенове неједнакости у тригонометрији”</i></u>
15:20 – 15:40
Elvir Čajić , Osnovna škola Prokosovići Lukavac / Ekonomsko-hemijska škola Lukavac Violeta Nikodinović , Medical school Stevica Jovanović Pančevo
<u><i>“Poissonove formule za domene u R^n i granično ponašanje u matematičkoj analizi te simulacija numeričkog rješenja putem Pythona”</i></u>
15:40 – 16:00
Дејан Вурдеља , ЕТШ „Земун”, Земун
<u><i>„Делљивост бројем 7 и један „тежак” разломак”</i></u>
16:00 – 16:20
Александра Даниловић , ОШ "Светислав Голубовић Митраљета", Батајница
<u><i>„Математика у итвининг пројектима”</i></u>
16:20 – 16:40
Соња Ђукић Поповић , ОШ „Милош Црњански“, Београд Стефан Поповић , Факултет информационах технологија, Београд
<u><i>„Утицај примене наставних средстава у настави математике на исходе учења”</i></u>
16:40 – 17:00
Татјана Мирковић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Татјана Бајић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u><i>„Диференцијалне једначине као једна класа динамичких једначина”</i></u>

III СЕКЦИЈА: НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКИ И СТРУЧНИ РАД СТУДЕНАТА

10:30 – 14:30 САТИ, САЛА БИМ/IV

Први део: 10:30 – 12:10

Председавајући: Јелена Тасић

10:30 – 10:50
Владимир Јанковић , Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача
<u>„Решавање проблема р-резервног центра помоћу генетског алгоритма”</u>
10:50 – 11:10
Лазар Васовић , Универзитет у Београду, Математички факултет
<u>„Статистичка анализа расподеле повезаности и неуређености протеина у мрежама протеинских интеракција вируса SARS-CoV-2”</u>
11:10 – 11:30
Stefan Mirchevski , Faculty of Civil Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje / Faculty of Computer Science and Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje Verica Vakeva , Faculty of Computer Science and Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje
<u>“Characteristics of the cost function for a class of single-server queueing systems with k phases of customer service”</u>
11:30 – 11:50
Teodora Gavrilović, Maja Anđić, Katarina Ilić, Olivera Đokić : University of Belgrade, Faculty of Education
<u>“Analysis of the textbook for 2nd grade of primary school by Zavod za udžbenike according to the structural blocks of TIMSS research”</u>
11:50 – 12:10
Милош Мићовић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Жељана Торлак , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет Наташа Ћировић , Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
<u>„Методе конјугованих градијената са применама”</u>

Пауза за кафу и освежење 12:10 – 12:30

Други део: 12:30 – 14:30

Председавајући: Наташа Павлов

12:30 – 12:50
Marina Pavlović , Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts Andelka Kovačević, Dragana Ilić, Iva Čvorivić Hajdinjak : University of Belgrade, Faculty of Mathematics Luka Č. Popović , Astronomical Observatory Belgrade Saša Simić , Faculty of Science, Institute of Physics, Kragujevac
<u>“Harnessing Deep Learning for Quasar Light Curve Modeling with ONPy”</u>

12:50 – 13:10
Aman Nadimpalli Raju, Anđelka Kovačević: University of Belgrade, Faculty of Mathematics Francesco Tombesi, Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Italy Dragana Ilić, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Luka Č. Popović, Astronomical Observatory Belgrade Eric Slezak, Université Côte d’Azur, Observatoire de la Côte d’Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France
<u>“A Deep Learning Approach for Understanding Quasar Light Curves in the Legacy Survey of Space and Time”</u>
13:10 – 13:30
Aliza Mustafa, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Marina Migliaccio, Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Italy Alessandro Carones, Physics Department, Tor Vergata University of Rome, Italy Bojan Arbutina, University of Belgrade, Faculty of Mathematics Marko Stalevski, Astronomical Observatory Belgrade Simon Prunet, Université Côte d’Azur, Observatoire de la Côte d’Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France
<u>“Cleaning CMB for Precision Cosmology”</u>
13:30 – 13:50
Marco Immanuel Rivera, University of Rome Tor Vergata, Italy / University of Belgrade Anđelka Kovačević, Dragana Ilić: University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Statistical inference of Quasar variability using dynesty”</u>
13:50 – 14:10
Nicolás Guerra-Varas, University of Belgrade / INAF-Osservatorio di Roma, Italia / Università di Roma Tor Vergata, Roma, Italia Anđelka Kovačević, Dragana Ilić, Luka Popović: University of Belgrade Angela Bongiorno, Enrico Piconcelli: INAF-Osservatorio di Roma, Italia Francesco Tombesi, Università di Roma Tor Vergata, Roma, Italia Nicole Nesvadba, Université Côte d’Azur, Nice, France
<u>“Dimensionality Reduction of Broad Absorption Line Quasar Spectra”</u>
14:10 – 14:30
Aurellio Deandra, University of Belgrade, Faculty of Mathematics
<u>“Sonification: how to present astronomical data and images with sounds”</u>

Пауза за кафу и освежење 14:30 – 15:00