УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЊИГА АПСТРАКАТА

XV СИМПОЗИЈУМ „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ”

12–13. децембар 2025.

Београд, Србија

THE BOOK OF ABSTRACTS

XV SYMPOSIUM "MATHEMATICS AND APPLICATIONS”

December, 12–13, 2025

Belgrade, Serbia

КЊИГА АПСТРАКАТА – XV СИМПОЗИЈУМ МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНЕ
12–13. децембар 2025.
Београд, Србија

Издавач:
Универзитет у Београду
Математички факултет 2025. године

За издавача:
проф. др Драгољуб Кечкић, в.д. декан

Главни и одговорни уредник:
доц. др Миљан Кнежевић

Уредник:
проф. др Александра Делић

Припрема за штампу:
проф. др Александра Делић
проф. др Сандра Живановић
доц. др Александар Јовић

Корице:
Хелена Јанковић
Штампа:
Донат Граф, Београд
Тираж:
80 примерака

©2025, [Универзитет у Београду, Математички факултет]. Овај материјал је лиценциран са Creative Commons Attribution 4.0 International License лиценцом.

CIP – Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

51-7(048)
371.3::51(048)

СИМПОЗИЈУМ "Математика и примене" (15 ; 2025 ; Београд)

Књига апстраката/ XV Симпозијум "Математика и примене", 12–13. децембар 2025. Београд, Србија = The book of abstracts / XV Symposium "Mathematics and Applications", December, 12–13, 2025, Belgrade, Serbia;[главни и одговорни уредник Миљан Кнежевић]. - Београд : Универзитет, Математички факултет, 2025 (Београд : Донат Граф). - 101 стр. ; 30 cm

Апстракти на срп. и енгл. језику. - Текст ћир. и лат. - Тираж 80. - Библиографија уз већину апстраката. - Регистар.

ISBN 978-86-7589-206-9

a) Математика – Апстракти b) Математика – Настава – Апстракти

COBISS.SR-ID 181678857

САДРЖАЈ

Уводна реч 5

Програмски одбор 8

Организациони одбор 9

In memoriam: проф. др Новица Блажић (1959-2005) 10

Математика и примене - данас 21

Математика и информатика у образовању 64

Научноистраживачки и стручни рад студената 85

Списак учесника 100

УВОДНА РЕЧ

Са великим задовољством представљамо Књигу апстраката јубиларног 15. Симпозијума „Математика и примене”, националног скупа са међународним учешћем, који се 12. и 13. децембра 2025. године одржава у организацији Математичког факултета Универзитета у Београду и Друштва математичара Србије.

Ове године обележавамо значајан јубилеј - 15 година једног од најпрепознатљивијих научних скупова нашег Факултета. Симпозијум „Математика и примене” временом је постао место сусрета врхунске математичке науке, инспиративне наставне праксе и савремених интердисциплинарних истраживања. На њему су учествовали бројни истакнути математичари из Србије и иностранства, остављајући трајан печат на развој математичке мисли у нашој академској заједници.

Желимо да подсетимо да је оснивач и идејни творац Симпозијума академик САНУ, проф. др Миодраг Матељевић, чија је визија створила трајну платформу за размену идеја, подстицање научне сарадње и унапређивање наставе математике. Истичемо да је Симпозијум током свих ових година стасавао и напредовао захваљујући заједничком ангажовању и изузетној посвећености великог броја наших колега. Чланови програмских и организационих одбора, универзитетски наставници и сарадници, истакнути научници из земље и иностранства, млади истраживачи, наставници у основним и средњим школама, студенти, као и бројни сарадници и пријатељи математичке заједнице, уткали су у Симпозијум своје знање, труд, искуство и идеје. Сарадња, професионализам и ентузијазам створили су атмосферу креативног дијалога и научне радозналости, те дали Симпозијуму препознатљив печат и учинили га једним од кључних математичких догађаја у Србији.

Симпозијум „Математика и примене” традиционално обухвата три тематске целине које одражавају ширину и значај математике у савременој науци, образовању и друштву. Када постоји посебан повод или значајан јубилеј, Симпозијум повремено добија и додатну, четврту секцију, што ће бити случај и ове године.

1. **Математика и примене - данас**
   Ова секција окупља врхунске истраживаче из разних области математике и њених примена. Она представља платформу за представљање савремених научних резултата, оригиналних теоријских и примењених истраживања, као и место где се гради научна сарадња са домаћим и страним математичарима. Ова секција је срце Симпозијума и одражава његов изразити научни карактер.

2. **Математика и информатика у образовању**
   Секција је намењена наставницима основних и средњих школа, као и свим члановима академске заједнице који се баве методиком наставе. Уверени смо да је она једна од најзначајнијих спона између Математичког факултета и наставника математике широм Србије. Више од 150 учесника сваке године долази управо због ове секције, која омогућава размену искустава, унапређење наставне праксе и подршку наставницима у њиховом професионалном развоју. Већина њих су наши дипломци, што Симпозијуму даје посебну вредност и емотивну димензију.

3. **Научно-истраживачки и стручни рад студената**
   Секција је посвећена студентима и представља простор за њихов први јавни наступ на скупу оваквог типа. У оквиру ове секције студенти основних, мастер и докторских студија излажу резултате својих истраживања, усавршавају академске

вештине и ступају у контакт са научницима и наставницима. Ова секција је од суштинске важности за подстицање младих талената и формирање будућих генерација истраживача.

4. **In memoriam: проф. др Новица Блажић (1959–2005)**
   Ове године на Симпозијуму посебно место заузима секција посвећена успомени на нашег уваженог колегу, проф. др Новицу Блажића, дугогодишњег члана Катедре за геометрију Математичког факултета. Професор Блажић је својим научним и педагошким радом, као и личним интегритетом, оставио дубок траг у развоју математике, а посебно геометрије у Србији. Две деценије након његове преране смрти, са поносом и поштовањем чувамо успомену на његов допринос. Ова секција ће окупити његове сараднике, студенте и поштоваоце, који кроз научна предавања и сећања чувају његово дело и настављају пут који је утемељио.

Стога, са великим поносом представљамо овај јубиларни зборник и желимо да 15. Симпозијум „Математика и примене" буде још један корак напред у промоцији науке, образовања, математичке културе и креативне сарадње у нашој заједници.

Организациони одбор 15. Симпозијума „Математика и примене"

Novica Blažić (1959-2005)

Novica was born on 27 August 1959 in Kruševac, where he completed elementary school and the first year of secondary education. He continued his studies at the Mathematical Grammar School in Belgrade. In the 1978/79 academic year, he enrolled at the Faculty of Science and Mathematics, Mathematics Department (Group A), where he graduated in 1982. During his studies, he distinguished himself by successfully participating in the International Mathematical Olympiads held in Belgrade and Bucharest, as well as in the Balkan Mathematical Olympiad for university students in Ankara. In the 1982/83 academic year, he commenced postgraduate studies in differential geometry. He defended his master's thesis, entitled Chern Characteristic Classes, in 1984 at the Faculty of Science in Belgrade under the supervision of Professor Neda Bokan. He defended his doctoral dissertation, Curvature and Characteristic Classes of Complex Vector Bundles, in 1990 at the same institution, under the mentorship of Professor Bang-Yen Chen. In 1985 and 1986, he spent eighteen months in specialization at Michigan State University, East Lansing, USA, working with Professors Bang-Yen Chen and David Blair. In 1993, he undertook a one-month research visit to the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), Berkeley, USA, during the thematic year devoted to differential geometry. As part of his international research collaborations, he visited and delivered lectures at several institutions, including: the Technical University of Denmark in Lyngby (July 1999), the University of Oregon (November 1993), the University of Bonn (September 2001), Humboldt University of Berlin (February 2002), and the Technical University of Berlin (September 2003). From 1982 to 2005, he was employed at the Faculty of Mathematics in Belgrade, during which period he also spent the years 1987–1992 as a researcher at the Institute for Applied Mathematics and Electronics. He was appointed Assistant Professor for the courses Differential Geometry and Analytic Geometry in 1991, and Associate Professor for the same courses in 1998. In 2004, he was elected Full Professor in the field of Geometry. He authored 31 scientific papers and 10 professional papers, and participated in 29 national and international conferences, both with contributed and invited presentations. He was a member of the Scientific Council of the Mathematical Institute in Belgrade and served on its Managing Board. He took an active role in mentoring postgraduate students. He supervised three master's theses and the doctoral dissertations of Zoran Rakić (1998), Ljubica Velimirović (1998), and Srđan Vukmirović (2003). He taught courses including Analytic Geometry, Foundations of Geometry, Mathematics I, Differential Geometry, Lie Groups, and Riemannian Geometry at the universities of Belgrade, Kragujevac, Priština, and Podgorica. He was co-author of the university textbooks Introduction to Differential Geometry (Vesta–Faculty of Mathematics, Belgrade, 1996) and Analytic Geometry (Faculty of Mathematics, Belgrade, 2002).

He collaborated in summer mathematical schools for high-school and university students, and was actively involved in preparing pupils for mathematical competitions. During the 1996/97 and 1997/98 academic years, he taught geometry as a mentor at the Mathematical Grammar School in Belgrade. Within the framework of his professional activities and efforts to promote mathematics, he regularly participated in events dedicated to mathematics education. He was involved in the organization of the Geometry Seminar at the Faculty of Mathematics, Belgrade. He contributed to Project 0401 of the Ministry of Science and Technology of Serbia as the leader of the topic Differential Geometry within the subproject Geometry and Topology. He also participated in the project Discrete and Computational Geometry and Topology Using Methods of Algebraic Topology and Differential Geometry (No. 1854), and was a member of the project Information Processing in Biology and Chemistry (No. 1858), devoted to applications of mathematics. He collaborated with the international journals Zentralblatt für Mathematik and Mathematical Reviews. He was a member of the American Mathematical Society (since 1986) and the European Mathematical Society (since 1998). A devoted admirer of plants and nature, he was the founder and president of the Bonsai Society of Belgrade. He passed away on 10 October 2005, leaving behind his wife Saveta and daughters Nevena and Jelena.

ПРОГРАМСКИ ОДБОР

- **проф. др Градимир Миловановић**,
  Академик САНУ,

- **проф. др Миодраг Матељевић**,
  Академик САНУ,

- **др Бранислав Боричић**,
  редовни професор Економског факултета Универзитета у Београду,

- **др Зоран Ракић,**
  редовни професор и декан Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Мирослав Марић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,
  председник Друштва математичара Србије,

- **др Милош Арсеновић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Зорица Станимировић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Небојша Икодиновић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Бојана Милошевић,**
  ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Миљан Кнежевић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Владимир Божин**,
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду.

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР

- **др Миљан Кнежевић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,
  председник Одбора,

- **др Зорица Станимировић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Драгана Илић,**
  редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Александра Делић,**
  ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Сандра Живановић,**
  ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Зорица Дражић,**
  ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Марко Обрадовић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Марек Светлик,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Сташа Вујичић Станковић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Александар Јовић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Јелена Јоцковић,**
  доцент Математичког факултета Универзитета у Београду,

- **др Ђорђе Стакић,**
  доцент Економског факултета Универзитета у Београду,

- **Вукашин Брковић,**
  асистент Факултета организационих наука Универзитета у Београду.

СЕКЦИЈА

In memoriam: проф. др Новица Блажић (1959-2005)

The finite groups of random walks in the quarter plane and 4-bar links

Vladimir Dragović

The University of Texas at Dallas/MISANU
e-mail: Vladimir.Dragovic@utdallas.edu

Abstract. We consider maximally space homogeneous random walks as a class of discrete time homogeneous Markov chains, with the state space being the quarter plane. The generators of the process in this region are $\{p_{ij}| -1 \leq i,j \leq 1\}$, where p_{ij} is the transition probability for the jump from (r,s) to $(r+i, s+j)$, for $rs > 0$. This leads to the consideration of a biquadratic curve $C(P)$ in the plane $P^1 \times P^1$, given by its affine equation in $\mathbb{C}^2$:

$$C(P)_A : Q_P(x,y) = xy\big(\sum_{i,j=-1}^{1} p_{ij}x^i y^j - 1\big) = 0, p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j=-1}^{1} p_{ij} = 1.$$

There is the vertical and horizontal switch, v and h defined on the biquadratic curve $C(P)$. The group of random walk in the quarter plane $H(P)$ is isomorphic to the group of automorphisms of the curve, generated with these two switches:

$$H(P) :=< h, p|h^2 = Id, p^2 = Id >,$$

We describe the situations with finite groups of random walks.

Then, we describe periodic 4-bar link configurations.

This is a work in progress, joint with Milena Radnović.

Keywords: random walks in the quarter plane; biquadratic equations; elliptic curves; groups of random walks; periodic 4-bar links.

Magnetic geodesic and sub-Riemannian flows on $\mathbf{V_{n,2}}$

Božidar Jovanović

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia
e-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0000-0002-3393-4323

Abstract. The rank-two Stiefel variety $V_{n,2} = SO(n)/SO(n-2)$ is the variety of ordered sets of two orthogonal unit vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ in the Euclidean space $(\mathbf{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. It can be seen also as the unit sphere bundle T_1S^{n-1} with respect to the standard round sphere metric

$$T_1S^{n-1} = \{\mathbf{e}_2 \in T_{\mathbf{e}_1}S^{n-1} \,|\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle = 1,\, \mathbf{e}_1 \in S^{n-1}\}, \quad S^{n-1} = \{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{R}^n \,|\, \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle = 1\}.$$

Therefore, it carries the *standard contact form*, the restriction of the Liouville 1-form from $TS^{n-1} \cong T^*S^{n-1}$ to the unit tangent bundle $\alpha = -\mathbf{e}_2 d\mathbf{e}_1|_{V_{n,2}} = -\sum_{i=1}^n e_2^i de_1^i|_{V_{n,2}}$.

Let $\mathcal{H} = \ker\alpha \subset TV_{n,2}$ be the *standard contact distribution*. The fact that $(V_{n,2}, \alpha)$ is a contact manifold is equivalent to the non-degeneracy of the closed two form $\omega_{mag} = d\alpha = d\mathbf{e}_1 \wedge d\mathbf{e}_2|_{V_{n,2}} = \sum_{i=1}^n de_1^i \wedge de_2^j|_{V_{n,2}}$ restricted to $\mathcal{H}$, or, to the condition $\alpha \wedge \omega_{mag}^{n-2} \neq 0$. We refer to ω_{mag} as the *standard contact magnetic form* on $V_{n,2}$. Thus, we can study the following four natural problems on the rank-two Stiefel variety:

- Magnetic geodesic flows with respect to the magnetic force defined by $\eta\,\omega_{mag}$. Here η is a real parameter representing the strength of the magnetic field, and for $\eta = 0$ we have the usual geodesic flows.
- Sub-Riemannian magnetic geodesic flows, with the sub-Riemannian structures defined on $\mathcal{H}$ and other $SO(n)$–invariant bracket generating distributions.
- Natural mechanical systems with influence of the magnetic field defined by $\eta\,\omega_{mag}$.
- Contact Hamiltonian systems on $(V_{n,2}, \alpha)$.

We prove complete integrability of magnetic geodesic flows of $SO(n)$–invariant Riemannian and sub-Riemannian metrics. We also consider integrable pendulum-type natural mechanical systems with the kinetic energy defined by $SO(n) \times SO(2)$–invariant Riemannian metrics. For $n = 3$, using the isomorphism $V_{3,2} \cong SO(3)$, the obtained integrable magnetic models reduce to integrable cases of a motion of a heavy rigid body with a gyrostat around a fixed point: Zhukovskiy–Volterra gyrostat, the Lagrange top with a gyrostat, and the Kowalevski top with a gyrostat.

This research was supported by the Serbian Ministry of Science, Technological Development and Innovation through Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts and it is a part of research of the proposal IntegraRS of the Science Fund of Serbia.

Keywords: complete integrability; magnetic flows; Lax pair; sub-Riemannian structures

References

[1] **V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović**, A Lax representation and integrability of homogeneous exact magnetic flows on spheres in all dimensions, *Russian Mathematical Surveys*, 2025, **80**, Issue 5, arXiv:2506.23299.

[2] **B. Jovanović**, Contact magnetic geodesic and sub-Riemannian flows on $V_{n,2}$ and integrable cases of a heavy rigid body with a gyrostat, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2025, **30**, Issue 5, arXiv:2506.13101 [math.DG].

[3] **B. Jovanović** Contact line bundles, foliations, and integrability, *Sb. Math.*, 2025, **216**, Issue 5, 123–150, arXiv:2502.02935 [math.SG].

From Nonholonomic Mechanics to Integrable Magnetic Flows on n-dimensional Spheres

Vladimir Dragović

The University of Texas at Dallas, Dallas, USA,
Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia
e-mail: Vladimir.Dragovic@utdallas.edu
ORCID: 0000-0002-0295-4743

Borislav Gajić

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia
e-mail: gajab@mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0000-0002-1463-0113

Božidar Jovanović

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia
e-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0000-0002-3393-4323

Abstract. The Chaplygin systems with gyroscopic forces are introduced and studied. We put a special emphasis on the important subclass of such systems with magnetic forces. In a reduction, we construct Hamiltonian magnetic systems on spheres S^n. We provide a Lax representation of the equations of motion and prove complete integrability of those systems for any n.

The research was supported by the Serbian Ministry of Science and the Simons Foundation grant no. 854861.

Keywords: nonholonomic mechanics; magnetic flows; Lax pair.

References

[1] **V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović** Demchenko's nonholonomic case of a gyroscopic ball rolling without sliding over a sphere after his 1923 Belgrade doctoral thesis, *Theor. Appl. Mech.*, 2020, 257 – 287.

[2] **V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović** Gyroscopic Chaplygin systems and integrable magnetic flows on spheres, *J. Nonlinear Sci.* 2023, 33, 43.

[3] **V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović** Integrability of homogeneous exact magnetic flows on spheres, *Reg. Chaot. Dyn*, 2025, 30 (4), 582—597.

[4] **V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović** A Lax representation and integrability of homogeneous exact magnetic flows on spheres in arbitrary dimensions, arXiv: 2506.23299,*Russian Math Surveys*, 2025, 80(5). 183–184.

[5] **A. V. Bolsinov, A. Yu. Konyaev, and V. S. Matveev** Inegrability of the magnetic geodesic flow on the sphere with a constant 2-form, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*, arXiv: 2506.23312, 2025.

On isolated singularities of some class of mappings on Riemannian manifolds

Victoria Desyatka

Zhytomyr Ivan Franko State University
e-mail: zehrerviktoria@gmail.com
ORCID: 0009-0003-2241-401X

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7892-6186

Abstract. Let $\mathbb{M}^n$ and $\mathbb{M}^n_*$ be Riemannian manifolds of dimension n with geodesic distances d and d_*, respectively, and let D be a domain in $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$. Set $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < r\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r\}$, $A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{M}^n_* : r_1 < d_*(y, y_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Let $dv(x)$ and $dv_*(x)$ be elements of volumes on $\mathbb{M}^n$ and $\mathbb{M}^n_*$, respectively. A Borel function $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$ is called admissible for the family Γ of paths γ in $\mathbb{M}^n$, if $\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geqslant 1$ for $\gamma \in \Gamma$. In this case we write: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Let $p \geqslant 1$, then p-modulus of Γ is defined by the relation $M_p(\Gamma) = \inf\limits_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x)\, dv(x)$. Set $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$. Let $Q\colon D \to [0, \infty]$ be a measurable function. Denote by $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Given sets E, F and G in $\mathbb{M}^n$, denote by $\Gamma(E, F, G)$ the family of all paths $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}^n$ joining E and F in G. Given $f : D \to \mathbb{M}^n$ and $y_0 \in f(D)$, denote by $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ the family of all paths γ in the domain D such that $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. We say that f satisfies the inverse Poletsky inequality at the point $y_0 \in f(D)$, if the inequality

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(d_*(y, y_0))\, dv_*(y) \tag{1}$$

holds for an arbitrary Lebesgue measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{2}$$

Set $q_{x_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$, where $d\mathcal{A}$ denotes the element of the surface area on $S(x_0, r)$. Let $\overline{\mathbb{M}^n} := \mathbb{M}^n \cup \{\infty\}$, and let $h : \overline{\mathbb{M}^n} \times \overline{\mathbb{M}^n} \to \mathbb{R}$ be a metric on $\overline{\mathbb{M}^n}$. Suppose that the manifold $\mathbb{M}^n$ is connected, then d is a metric on $\mathbb{M}^n$. We say that h satisfies the condition weak sphericalization, if $(\overline{\mathbb{M}^n}, h)$ is a compact metric space and h and d generate the same topology on $\mathbb{M}^n$. The following statement is true.

Theorem. ([1]). *Let $n \geqslant 2$, D be a domain in $\mathbb{M}^n$, let $x_0 \in D$, let $a, b \in \mathbb{M}^n_*$, $a \neq b$ and let $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{M}^n_* \setminus \{a, b\}$ be an open discrete mapping that satisfies the conditions (7)–(8) at all points $y_0 \in \overline{D'}$, where $D' := f(D \setminus \{x_0\})$. Suppose that the manifold $\mathbb{M}^n_*$ is connected and admits the condition of weak sphericalization. Suppose that, in addition, that for each point $y_0 \in \overline{D'}$ there exists $r_0 = r_0(y_0) > 0$ such that $q_{y_0}(r) < \infty$ for a.a. $r \in (0, r_0)$. Then f has a continuous, open and discrete extension $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{M}^n}$, whose continuity should be understood in the sense of the metric h.*

Keywords: quasiregular mappings, quasiconformal mappings, singularities, manifolds.

References

[1] **V. Desyatka, E. Sevost'yanov.** Removable singularities of mappings with inverse Poletsky inequality on Riemannian manifolds. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2024, 76, 1097–1107.

Osserman manifolds

Zoran Rakić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: zoran.rakic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-6226-0479

Abstract. Let (M, g) be a pseudo-Riemannian manifold with curvature tensor R. The *Jacobi operator* R_X is the symmetric endomorphism of T_pM defined by $R_X(Y) = R(Y, X)X$.

In the Riemannian setting, if M is locally a rank-one symmetric space or if M is flat, then the local isometry group acts transitively on the unit sphere bundle SM. Consequently, the eigenvalues of R_X are constant on SM. In the late 1980s, Osserman raised the question of whether the converse also holds; this problem is now known as the *Osserman conjecture*.

In the first part of the lecture, we will present an overview of Osserman-type problems in pseudo-Riemannian geometry, based on the paper: N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić: **Osserman Pseudo-Riemannian Manifolds of Signature** $(2, 2)$, *J. Austral. Math. Soc.*, **71** (2001), 367–395, as well as other related works by the same authors.
The second part of the lecture will be devoted to the equivalence between the pointwise Osserman condition and the duality principle. This part is based on joint results obtained in collaboration with Yury Nikolayevsky and Vladica Andrejić.

This lecture is dedicated to the memory of my mentor, Professor Novica Blažić, who passed away two decades ago.

Keywords: Pseudo-Riemannian manifold, Jacobi operator, unit sphere bundle SM, Osserman manifold,
Osserman pointwise condition, (Rakić) duality principle, Osserman conjecture.

Integrable billiard systems in homogeneous media separated by confocal quadrics

Theodore Popelensky

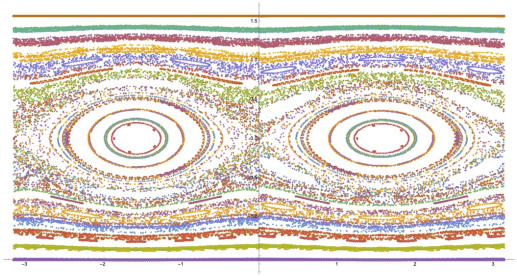
Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State Lomonosov University
e-mail: popelens@mech.math.msu.su
ORCID: 0000-0002-8984-7739

Abstract. In this talk we focus on a new integrable system related to billiard systems in domains bounded by confocal quadrics.

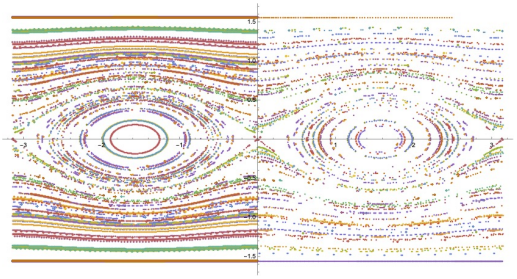
Consider a flat domain bounded by an ellipse that contains two media of different optical densities. The boundary interface between the media is a confocal quadric. At this interface, a light ray is either refracted according to Snell's law or experiences total internal reflection. It is easy to verify experimentally that such a system is not integrable.

However, if we modify the refraction law by replacing the sines of the incident and refracted rays with cosines, then this new system acquires a first integral.

More general systems containing several media separated by confocal quadrics are also integrable . In some of these more general cases, this first integral takes its values on a circle, that is its value is defined up to the addition of a specific, well-defined constant.



Snell law, no integrability



Cosine law, intergable

Explicit formulas for these first integrals in different situations will be presented, along with a description of the surfaces of constant level of the first integral and their bifurcations near the critical value of the first integral.

The talk is based on the paper [1].

Keywords: integrable system; refraction law; confocal quadric.

References

[1] **M. A. Nikulin, Th. Yu. Popelensky.** Integral level surfaces for the billiard system with cosine refraction. *Sbornik: Math.*, 2025, 216:10, 101–158.

Almost Calabi-Yau with torsion 6-manifolds, parallel torsion and the instanton condition

Stefan Ivanov

University of Sofia "St.Kl.Ohridski", Faculty of Mathematics and Informatics,
blvd. James Bourchier 5, 1164, Sofia, Bulgaria
and Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: ivanovsp@fmi.uni-sofia.bg
ORCID: 0000-0002-5389-4023

Abstract. It is shown in [2] that on a 6-dimensional compact almost complex Calabi-Yau with torsion (ACYT) 6 dimensional manifold, i.e. an almost complex 6-manifold with an $SU(3)$-structure which is parallel with respect to the unique connection ∇ with skew-symmetric torsion, the Nijenhuis 3-form is parallel with respec to the torsion connection.

It follows from [3, Lemma 3.4] that if the torsion 3-form of an ACYT 2n-manifold is parallel with respect to the torsion connection with holonomy contained in the group $SU(n)$ with Lie algebra $\mathfrak{su}(n)$, then its curvature is an $SU(n)$ instanton, i.e. $R \in \mathfrak{su}(n) \otimes \mathfrak{su}(n)$. This is because $R \in S^2\Lambda^2$ if and only if ∇T is a 4-form, i.e. the 3-form T is Killing.

For the converse, it is observed in [1], that on a compact almost complex Calabi-Yau with torsion (ACYT) 6-manifold with co-closed Lee form the curvature of the torsion connection is an $SU(3)$-instanton if and only if the torsion is parallel with respect to the torsion connection. The same conclusion holds for any (non necessarily compact) balanced ACYT 6-manifold. In particular, on a CYT 6-manifold (ACYT with vanishing Nijenhuis tensor) the Strominger-Bismut connection is an $SU(3)$-instanton if and only if the torsion is parallel with respect to the Strominger-Bismut connection provided either the CYT 6-manifold is compact with co-closed Lee form or it is a balanced CYT 6-manifold.

Keywords: torsion connection, $SU(3)$ holonomy, almost Calabi-Yau with torsion, $SU(3)$-instanton.

References

[1] **S. Ivanov, L. Ugarte.** Almost Calabi-Yau with torsion 6-manifolds and the instanton condition, *arXiv:2507.01655.*

[2] **S. Ivanov, N. Stanchev.** The Riemannian curvature identities on almost Calabi-Yau with torsion 6-manifold and generalized Ricci solitons, *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)*, 2025, 204, 513–542.

[3] **S. Ivanov.** Geometry of Quaternionic Kähler connections with torsion, *J. Geom. Phys.* 2002 41, 235-257.

Hyperbolic Derivatives for HQC Mappings and Applications

Miljan Knežević

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: miljan.knezevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0000-4055-1227

Marek Svetlik

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: marek.svetlik@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0005-0213-2167

Abstract. We analyse the properties of hyperbolic metrics on various domains to obtain the Schwarz-Pick type inequalities for HQC mappings. We also present several variants of the classical Koebe theorem, along with precise hyperbolic distortion estimates, for a notable class of real-valued harmonic functions defined on the unit disc whose range is contained in the interval $(-1, 1)$. Furthermore, we prove a significant result for the class of real harmonic functions defined on a Riemann surface equipped with a complete conformal metric whose Gaussian curvature is bounded below by a negative constant. This result provides a natural generalization of classical hyperbolic estimates and reveals deeper geometric structure in the behavior of such mappings.

Keywords: Gaussian curvature; Riemann surfaces; hyperbolic derivative; the Schwarz-Pick lemma; HQC mappings; conformal metrics.

References

[1] **S.T. Yau.** A general Schwarz Lemma for Kähler Manifolds. *Amer. Jour. Math.*, 100, 197–203, 1978.
[2] **R. Harmelin.** Hyperbolic metric, curvature of geodesics and hyperbolic discs in hyperbolic plane domains. *Israel J. Math.*, 70 (1), 111-128, 1990.
[3] **M. Knežević.** Some remarks on generalized Schwarz-Pick type inequality for harmonic quasiconformal mappings with simply connected ranges. *Filomat*, 39:7 (2025).
[4] **M. Knežević, M. Mateljević, M. Svetlik.** Some Estimates for Hyperbolic Derivative for HQC Mappings and Applications. *Results Math.*, **80**, 229 (2025).

Invariant complex and hypercomplex structures on homogeneous spaces

Svjetlana Terzić

Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro
e-mail: sterzic@ucg.ac.me
ORCID: 0000-0002-7014-0936

Abstract. The classical work of Borel and Hirzebruch [1] enables complete description of invariant almost complex and invariant complex structures on compact homogeneous spaces in terms of Lie groups root theory. The theory of invariant hypercomplex structures is developed in the seminal paper of Joyce, [3]. Relying on this, we give an overview of some of our results [2], [5] on existence and classification of such structures on some generalized symmetric spaces in connection with the corresponding Chern, Pontrjagin and cobordism characteristic classes and the corresponding characteristic numbers. We start by recalling some basic properties of the Chern numbers of a general hypercomplex vector bundle on a smooth manifold based on a geometric approach [4].

Keywords: homogeneous spaces; invariant complex structures; characteristic classes;.

References

[1] **A. Borel, F. Hirzebruch.** Characteristic classes and homogeneous spaces. I & II, *American J. of Math.* 80, 1958, 459–538 and 81, 1959, 315–382.

[2] **V. M. Buchstaber, S. Terzić.** Equivariant complex structures on homogeneous spaces and their cobordism classes. In: *Geometry, topology, and mathematical physics*, 27–57, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 224, Adv. Math. Sci., 61, Amer. Math. Soc., 2008.

[3] **D. Joyce.** Compact quaternionic and hypercomplex manifolds. *J. of Differential Geometry*, 35, 1992, 743 - 761 .

[4] **S. Terzić.** Characteristic classes of quaternionic vector bundles. *Master thesis, supervisor Novica Blažić*, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 1996.

[5] **S. Terzić.** On invariant hypercomplex structures on homogeneous spaces. *Sarajevo J. of Math.*, 20(33), 2024, no. 1, 87–93.

Examples of pointwise Osserman manifolds of neutral signature

Srdjan Vukmirović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: srdjan.vukmirovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5135-869X

Abstract. This is an overview of the paper [1], a joint work with Novica Blažić.

Let p, q be relatively prime natural numbers. We consider certain isometric action $\phi_t^{p,q}$ of an one-dimensional non-compact Lie group on the paraquaternionic projective plane $\bar{\mathbb{H}}P^2$ of signature $(4, 4)$. This action preserves the paraquaternionic structure on the projective plane. By the method of paraquaternionic reduction, a family of orbifolds $\mathcal{O}_{p,q}$ with an induced metric of signature (2,2) is obtained. We study the geometry of these orbifolds. In particular, we show that the orbifolds $\mathcal{O}_{p,q}$ are pointwise Osserman, but not even locally homogeneous.

Keywords: Osserman manifold; Einstain manifold; quaternionic plane; quaternionic reduction.

References

[1] **N. Blažić, S. Vukmirović**, Examples of self-dual, Einstein metrics of $(2, 2)$-signature, *Mathematica Scandinavica*, 2004, 94(1), 63–74.

Is there a proper way to define a sectional curvature on a generalized Riemannian space in Eisenhart's sense?

Miloš Z. Petrović

University of Niš, Faculty of Agriculture in Kruševac, Kosančićeva 4, 37000 Kruševac, Republic of Serbia
e-mail: petrovic.milos@ni.ac.rs
ORCID: 0000-0002-0308-8074

Abstract. The talk is partially based on the talk that the author gave at RIGA 2025 conference [1]. The motivation to study generalized Riemannian spaces in Eisenhart's sense came from the monograph [5]. On the other hand, A. Mihai and I. Mihai [2], inspired by B. Opozda's papers [3] and [4], defined the $(0,4)$ tensor field S, by $S(X,Y,Z,W) := \frac{1}{2}[g(R(X,Y)W,Z) + g(R'(X,Y)W,Z)] = \frac{1}{2}[g(R(X,Y)W,Z) - g(R(X,Y)Z,W)]$. The tensor S served for the proper definition of sectional curvature of a semi-symmetric non-metric connection, by $S(e_1,e_2,e_1,e_2)$, which does not depend on the orthonormal basis e_1 and e_2 of the tangent space T_pM at the point p of manifold M. Our aim is to well-define the sectional curvature of a linear connection determined by generalized Koszul's formula on generalized Riemannian manifold in Eisenhart's sense. In that case, there are different tensor fields that "play the role," in some sense, of the curvature, but lack some of usual curvature properties. We ask the question from the title of the talk and try to find the right path to study such a problem.

Keywords: linear connection; torsion; manifold; curvature; sectional curvature.

References

[1] **M. Z. Petrović.** On sectional curvature of generalized Riemannian spaces in Eisenhart's sense. In: *Book of abstracts, International Conference Riemannian Geometry and Applications – RIGA 2025*. Technical University of Civil Engineering Bucharest, Bucharest, 2025, 30–30. https://fcfdp.utcb.ro/wp-content/uploads/2025/05/Book-of-Abstracts_final.pdf

[2] **A. Mihai, I. Mihai.** A note on a well-defined sectional curvature of a semi-symmetric non-metric connection. *International Electronic Journal of Geometry*, 2024, 17, 15–23.

[3] **B. Opozda.** Bochner's technique for statistical structures. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 2015, 48, 357–395.

[4] **B. Opozda.** A sectional curvature for statistical structures. *Linear Algebra and Its Applications*, 2016, 497, 134–161.

[5] **S. M. Minčić, M. S. Stanković and Lj. S. Velimirović.** Generalized Riemannian spaces and spaces of non-symmetric affine connection. *Monograph, 1st ed.*, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, 2013.

СЕКЦИЈА

Математика и примене - данас

Педесет година сарадње: београдски математичари на Московском државном универзитету

Александар Липковски

Универзуитет у Београду - Математички факултет
e-mail: aleksandar.lipkovski@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-7267-1490

Апстракт. Већ више од пола века постоји и функционише уговор о сарадњи између Универзитета у Београду и Московског Државног Универзитета, у разним облицима. У тој међууниверзитетској сарадњи огроман је удео београдских и московских математичара са Математичког факултета УБ и Механичко-математичког факултета МГУ. У овом математичко-историјском прегледу биће речи о њима.

Кључне речи: историја математике; МатФ УБ; Мехмат МГУ.

Библиографија

[1] **A. Lipkovski (ed.)** 150 godina Matematičkog fakulteta. Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2023, 412 pp.
[2] **V. B. Demidovich** K istorii mehmata MGU. MGU, Moskva, 2013, 424 pp.

Теорија фиксне тачке у metric-like просторима: α–θ–Geraghty контракције и симулационе функције

Милица Саватовић

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, Булевар краља Александра 73, Београд
e-mail: milica.makragic@etf.rs
ORCID: 0000-0003-0439-1451

Јасмина Вујадиновић

Универзитет одбране, Војна академија, Велька Лукића Курјака 33, Београд
e-mail: jasmina.fijuljanin@va.mod.gov.rs
ORCID: 0000-0003-2479-9868

Abdellah Taqbibt

Laboratory of Applied Mathematics and Scientific Calculus, Sultan Moulay Slimane University, P.O. Box 523, FST, Beni Mellal, 23000, Morocco
e-mail: abdellah.taqbibt@usms.ma
ORCID: 0000-0001-5650-1988

Апстракт. Теорија фиксне тачке представља један од централних концепата анализе и нелинеарне теорије оператора, са применама у оптимизацији, теорији игара, инжењерским моделима. Класични Banach-ов принцип контракције [1] даје једноставан и снажан критеријум за постојање јединствене фиксне тачке, али захтева јаке претпоставке попут стандардне метрике и глобалне контрактивности. Савремени развој теорије иде у правцу слабљења ових услова, како би се омогућила примена на шире класе пресликавања и структура простора. У том контексту уводе се metric-like простори и α–θ–Geraghty контракције дефинисане помоћу симулационих функција које представљају уједињујући оквир многих модерних типова контракција.

Симулационе функције омогућавају флексибилније изражавање контрактивног услова, α-функција уводи контролу релације међу тачкама, а θ-функција додатну модулацију контракцијског степена. Тиме се обухватају и генерализују познати резултати Banach-а, Geraghty-ја [2] и Samet–Vetro-а [3].

У раду ћемо представити услове под којима овакве контракције у комплетним metric-like просторима гарантују постојање и јединственост фиксне тачке, чиме се показује да ови концепти представља-ју природан наставак и проширење класичне теорије. Резултати [4] указују да α–θ–Geraghty контракције формирају мост између традиционалних и савремених приступа, отварајући нове могућности примене у нелинеарној анализи и математичким моделима са ослабљеним структуралним захтевима.

Кључне речи: фиксна тачка; metric-like простори; α–θ–Geraghty контракције; симулациона функција.

Библиографија

[1] **S. Banach.** Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 1922, 3, 133–181.

[2] **R. K. Geraghty.** On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1973, 40, 604–608.

[3] **B. Samet, C. Vetro, P. Vetro.** Fixed point theorems for α–ψ contractions. *Nonlinear Analysis*, 2012, 75, 2154–2165.

[4] **A. Taqbibt, M. Elomari, M. Savatović, S. Melliani, S. Radenović.** Fixed point results for a new α–θ–Geraghty type contraction mapping in metric-like space via C_G-simulation functions". *AIMS Mathematics*, 2023, 8(12), 30313–30334.

О Јакоби-ортогоналности у тродимензионом простору са скаларним производом

Катарина Лукић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16
e-mail: katarina.lukic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-7638-8994

Апстракт. У раду [1] дефинисано је да је Риманов алгебарски тензор кривине на простору са скаларним производом $(\mathcal{V}, g)$ Јакоби-ортогоналан ако $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$ важи за све X и Y из $\mathcal{V}$ такве да је $g(X, Y) = 0$, где је $\mathcal{J}$ Јакобијев оператор и доказано је да је сваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор Осерманов, као и да су сви познати (два-корена и Клифордови) Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. Уопштавамо особину Јакоби-ортогоналности на просторе са (могуће недефинитним) скаларним производом (као што је изложено у раду [2]) и доказујемо да је алгебарски тензор кривине на тродимензионом простору са скаларним производом Јакоби-ортогоналан ако и само ако је константне секционе кривине, односно Осерманов.

Кључне речи: тродимензиони простор са скаларним производом; алгебарски тензор кривине; Јакоби-ортогоналност; Осерманови тензори.

Библиографија

[1] **V. Andrejić, K. Lukić.** The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds. *Acta Math. Hungar.*, 2024, 173, 246–252.

[2] **K. Lukić.** The Jacobi-orthogonality in indefinite scalar product spaces. *Publ. Inst. Math.*, 2024, 115, 33–44.

O problemu Kakeje

Radoš Bakić

Univerzitet u Beogradu Fakultet za obrazovanje učitelja i vaspitača, Beograd
e-mail: rados.bakic@uf.bg.ac.rs

Apstrakt. Neka je $p(x)$ kompleksni polinom stepena n. Pretpostavimo da se u određenom disku D nalazi k nula ovog polinoma. Problem Kakeje podrazumeva da se nađe disk D_1 koji sadrži m nula nekog od izvodnih polinoma za polinom $p(x)$, pri čemu je $m < k$. Disk D_1 bi po mogućstvu trebao da bude najmanji mogući. Ovaj problem je rešen samo u nekoliko vrlo specijalnih slučajeva. Na predavanju će biti reči o određivanju diska D_1 u sledećem slučaju: ako se k nula polinoma $p(x)$ nalazi u nekom disku D, odrediti disk D_1 koji sadrži bar jednu nulu polinoma $p^{(k-1)}(x)$.

Ključne reči: Nule kompleksnih polinoma; problem Kakeje; nule izvoda višeg reda.

O normama k-cirkularnih matrica sa Jakobstalovim brojevima

Biljana Radičić

Univerzitet Singidunum, Danijelova 32, 11 010 Beograd i Bulevar Peka Dapčevića 47a, 11 000 Beograd, Srbija
e-mail: bradicic@singidunum.ac.rs
ORCID: 0000-0003-1072-2878

Apstrakt. Predmet analize u ovom radu su k-cirkularne matrice, pri čemu je k proizvoljan kompleksan broj. Ove matrice pripadaju klasi Teplicovih matrica čija je specifičnost da imaju isti element duž glavne dijagonale, što važi i za svaku dijagonalu paralelnu glavnoj dijagonali. Analiza je usmerena na k-cirkularne matrice sa prvim redom $(J_1, J_2, \ldots, J_n)$, kao i na k-cirkularne matrice sa prvim redom $\left(\frac{1}{J_1}, \frac{1}{J_2}, \ldots, \frac{1}{J_n}\right)$, gde je J_n n-ti Jakobstalov broj, i to norme (1-norma, ∞-norma, Euklidska i spektralna norma) navedenih matrica. Za neke od navedenih normi određene su gornja i donja granica tj. interval u okviru kojih se može naći njihova vrednost, dok su za neke norme određene njihove tačne vrednosti. Dobijeni rezultati su ilustrovani primerima.

Ključne reči: k-cirkularne matrice; Jakobstalovi brojevi; norme matrica.

Bibliografija

[1] **R. E. Cline, R. J. Plemmons, G. Worm.** Generalized inverses of certain Toeplitz matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 1974, 8(1), 25 – 33.
[2] **R. A. Horn, C. R. Johnson.** Topics in Matrix Analysis. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1991.
[3] **G. Zielke.** Some remarks on matrix norms, condition numbers, and error estimates for linear equations. *Linear Algebra and its Applications*, 1988, 110, 29 – 41.

XT-REM: Dvokomponentni model za robusnu meta-analizu proporcija ekstremnih događaja

Jovana Dedeić

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
e-mail: radenovicj@uns.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5946-4438

Jelena Ivetić

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
e-mail: jelenaivetic@uns.ac.rs
ORCID: 0000-0001-5157-7967

Srđan Milićević

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
e-mail: srdjan88@uns.ac.rs.
ORCID: 0000-0002-9716-7872

Katarina Vidojević

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
e-mail: vidojevic9@uns.ac.rs
ORCID: 0000-0003-0479-4795

Marija Delić

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
e-mail: marijadelic@uns.ac.rs
ORCID: 0000-0002-3335-7546

Apstrakt. U ovom radu predstavljamo novu metodologiju za robusnu meta-analizu proporcija kod retkih, ali klinički značajnih događaja, zasnovanu na integraciji hijerarhijskih modela i teorije ekstremnih vrednosti. Predloženi model XT-REM (eXtended Tail Random-Effects Meta-analysis) kombinuje klasični model nasumičnih efekata (REM) sa pristupom zasnovanim na Generalizovanoj Pareto raspodeli (GPD) kako bi se obuhvatilo simultano modelovanje centralne tendencije i ekstremnih proporcija. Time se omogućava detaljnija analiza gornjih granica rizika, posebno u biomedicinskim istraživanjima gde ekstremne vrednosti predstavljaju ključni klinički signal. Primena XT-REM modela na realnim podacima o neželjenim efektima imunoterapije pokazuje bolje prilagođavanje podacima u odnosu na standardni REM model, uz veću log-verovatnoću i niži Akaikeov Informacioni Kriterijum (AIC), čime se potvrđuje njegova metodološka prednost.

Razvoj ovog modela motivisan je prethodnim istraživanjem u kome smo sproveli komparativnu meta-analizu imunoterapije malignog melanoma primenom fiksnih efekata (FEM), nasumičnih efekata (REM) i generalizovanih linearnih mešanih modela (GLMM) [1]. Analiza je pokazala značajan uticaj izbora modela na procenu terapijske efikasnosti i sigurnosti, te istakla ograničenja postojećih pristupa u uslovima ekstremnih vrednosti, što je otvorilo prostor za razvoj novog metodološkog okvira XT-REM.

Ključne reči: meta-analiza; model nasumičnih efekata; teorija ekstremnih vrednosti; Generalizovana Pareto raspodela.

Bibliografija

[1] **J. Ivetić, J. Dedeić, S. Milićević, K. Vidojević, M. Delić.** Comparative Meta-Analysis of Survival, Risk, and Treatment Efficacy in Immunotherapy for Metastatic Melanoma Using Random-, Fixed-, and Mixed-Effects Models. J. Clin. Med. 2025, 14, 5017. https://doi.org/10.3390/jcm14145017.
Zahvalnica: Istraživanje sprovedeno uz podršku Fonda za nauku Republike Srbije, 9393, Optimization and prediction in therapy treatments of cancer – OPTIC.

Designing modern slot machines using probabilities, combinatorics, and optimization

Angelo Sifaleras

Department of Applied Informatics, School of Information Sciences, University of Macedonia
156 Egnatias Str., 54636, Thessaloniki, Greece
e-mail: sifalera@uom.gr
ORCID: 0000-0002-5696-7021

Abstract. This talk provides an introduction to the fundamentals of casino slot game mathematics [1,2]. We give a short overview of key elements such as Return-to-Player (RTP), volatility, and probability, and how they influence gameplay and player experience [3]. In addition, we present a Variable Neighborhood Search (VNS) metaheuristic approach for solving the RTP optimization problem [5]. A large number of software companies in the gaming industry [4] seek to solve the RTP optimization problem, in order to develop modern virtual casino gambling machines. These slot machines have a number of reels (e.g., three or more) that spin once a button is pressed. Each slot machine is required to have an RTP in a particular range according to the legislation of each country. By using a VNS framework which guides two local search operators we show how to control the distribution of the symbols in the reels in order to achieve the desired RTP. This talk is based on a recent collaboration with the Zeusplay casino game developer company (`https://zeusplay.com`).

Keywords: casino slot game mathematics; slot machine optimization; return to player; metaheuristics; variable neighborhood search.

References

[1] **C. Barboianu.** The mathematics of slots: Configurations, combinations, probabilities. INFAROM Publishing, 2013.
[2] **C. Barboianu.** Probability guide to gambling: The mathematics of dice, slots, roulette, baccarat, blackjack, poker, lottery and sport bets. INFAROM Publishing, 2006.
[3] **R. Muir.** Elements of slot design. Game Design Automation Pty Ltd, 3rd ed., 2023.
[4] **S. Singh.** Slot machines global market report 2025. *Technical Report CMR759904*, Cognitive Market Research, 2025.
[5] **P. Kamanas, A. Sifaleras, N. Samaras.** Slot machine RTP optimization using variable neighborhood search. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 8784065.

The Schwarz Lemma for Holomorphic and Minimal Disks at the Boundary

David Kalaj

Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro
e-mail: davidkalaj@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0017-6562

Abstract. In this work, we establish a boundary version of the Schwarz lemma for holomorphic disks on the unit ball in the complex plane. Extending classical interior results, our analysis provides sharp inequalities for the derivative of holomorphic maps at boundary points, reflecting the interplay between boundary geometry and conformal invariants. Furthermore, by applying the recently developed Schwarz–Pick type lemma for minimal conformal disks due to Forstneric and Kalaj (2024), we derive a boundary Schwarz lemma for minimal surfaces parametrized by conformal disks. This result bridges complex analysis and minimal surface theory, revealing structural parallels between holomorphic and minimal mappings. The methods combine geometric function theory and boundary regularity arguments, leading to new insights into extremal problems for holomorphic and minimal disks at the boundary.

Keywords: Schwarz lemma; minimal surfaces; conformal disks; minimal disks.

References

[1] **F. Forstneric, and D. Kalaj.** Schwarz–Pick lemma for harmonic maps which are conformal at a point. *Analysis & PDE*, **17**(3):981–1003, 2024.

[2] **D. Kalaj.** The Schwarz lemma for holomorphic and minimal disks at the boundary. *Arxiv preprint*, arXiv:2509.09471 [math.CV], 2025.

A Nitsche method for fluid flow with dynamic and set-valued boundary conditions

Pablo Alexei Gazca Orozco

Charles University Prague
e-mail: gazca@karlin.mff.cuni.cz
ORCID: 0000-0001-9859-4238

Franz Gmeineder

University of Konstanz
e-mail: franz.gmeineder@uni-konstanz.de
ORCID: 0000-0002-2475-9201

Erika Maringová-Kokavcová

Institute of Science and Technology Austria
e-mail: erika.kokavcova@ist.ac.at
ORCID: 0000-0001-5478-9359

Tabea Tscherpel

TU Darmstadt
e-mail: tscherpel@mathematik.tu-darmstadt.de
ORCID: 0000-0002-5899-1279

Abstract. The classical no-slip (or homogeneous Dirichlet) boundary condition for fluid flow is not appropriate in many situations, as many fluids will often slip at solid walls. In this work we propose a theoretical framework that is able to capture a wide variety of slip models, including linear (Navier) slip, non-linear (and possibly non-smooth) slip described by monotone graphs, non-monotone slip, and dynamic (time-dependent) slip. A finite element scheme is proposed, in which the non-penetrability condition at the wall is enforced with a Nitsche formulation. One of the key tools in the convergence proof is an inhomogeneous Korn inequality that includes a normal trace term. Numerical experiments implemented in firedrake will also be presented. The talk is based on the recent work [1].

Keywords: slip boundary conditions; incompressible fluids; finite element method; Nitsche formulation; Korn inequality.

References

[1] **P.A. Gazca-Orozco, F. Gmeineder, E. Maringová-Kokavcová, T. Tscherpel.** A Nitsche method for incompressible fluids with general dynamic boundary conditions. *ArXiv Preprint:2502.09550*, 2025 (submitted).

On Ray of the Deformation Cone of Permutahedra

Filip D. Jevtić
MI SANU
e-mail: filip@mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0009-0009-9594-9895

Abstract. Deformed permutahedra were originally introduced by Edmonds in 1970, under the name of *polymatroids*, and rediscovered in 2009 under the name of *generalized permutahedra* by Postnikov. This family of polytopes appeares naturally in many areas of mathematics, such as algebraic combinatorics, optimization, game theory, statistics, mathematical economics, etc.

While it is known that the set of deformed permutahedra can be parameterized by the cone of *submodular functions*, the structure of the submodular cone is far from being well understood. In particular determining the rays of $Def_{ess}(P_{n+1})$ remains an open problem since the 1970s.

We present our recent findings ([1]) regarding this problem, namely we identify that the *median hypersimplex* as the generator of a S_{n+1}-invariant ray in $Def_{ess}(P_{n+1})$.

Keywords: Permutahedra; Deformation Cone; Median Hypersimples; Idecomposability.

References

[1] **Filip D. Jevtić, Marinko Ž. Timotijević, Rade T. Živaljević.** Indecomposability of the median hypersimplex and polytopality of the hemi-icosahedral Bier sphere. *Filomat* 39:13 (2025), 4251–4260.

On conjectures relating to algebraic integers

Dragan Stankov

University of Belgrade, Faculty of Mining and Geology, Djusina 7, 11120 Belgrade
e-mail: dragan.stankov@rgf.bg.ac.rs

Abstract. Lehmer's Mahler measure conjecture asserts that there is an absolute constant $\mu > 1$ such that every polynomial with integer coefficients has the Mahler measure $\geq \mu$ or it is an integral multiple of a product of cyclotomic polynomials or the monomial x. It is widely believed that the unique root, out of the unit circle, of the Lehmer polynomial represents the true minimal value: that is, $\mu = 1.176280818\ldots$. It is the smallest known Salem number. Recently, Vesselin Dimitrov proved a sixty years old conjecture of Shinzel and Zassenhaus. We comment the possibility of using some steps of his proof to prove other unsolved problems in algebraic number theory, for example the Lehmer conjecture.

Keywords: Mahler measure; conjecture of Shinzel and Zassenhaus; Lehmer conjecture; Salem number.

References

[1] **V. Dimitrov.** A proof of the Schinzel–Zassenhaus conjecture on polynomials, *Preprint arXiv* 1912.12545 [math.NT] (2019), 27 pp.

[2] **D. Stankov.** A necessary and sufficient condition for an algebraic integer to be a Salem number. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2019, 31, 215–226.

[3] **W. Zudilin.** Analytic Methods in Number Theory (Radboud University Nijmegen, The Netherlands) Monographs in Number Theory. September 2023

First-Order Methods for Variational and Quasi-Variational Inequalities: Modifications of Gradient Descent

Nevena Mijajlović

Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro, Montenegro
e-mail: nevenami@ucg.ac.me
ORCID: 0000-0001-6792-1435

Ajlan Zajmović

Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro, Montenegro
e-mail: ajlan.z@ucg.ac.me
ORCID: 0009-0005-5949-7597

Milojica Jaćimović

Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Montenegro
e-mail: milojica@jacimovic.me
ORCID: 0000-0002-7068-8563

Abstract. In this talk, we present several first-order optimization methods that can be viewed as straightforward modifications of the standard gradient descent algorithm. Each method provides specific advantages: some substantially accelerate convergence, while others ensure convergence over a broader class of problems. Special attention is given to the application of these methods to variational and quasi-variational inequalities, where their structure and stability properties are particularly beneficial. We present a selection of these methods, highlight their theoretical properties, and report numerical results that illustrate their performance.

Keywords: gradient descent; extragradient method; forward–backward–forward algorithm; variational inequalities; quasi-variational inequalities.

References

[1] **N. Mijajlović, M. Jaćimović.** Strong convergence theorems by an extragradient-like approximation methods for quasi-variational inequalities, *Optim Lett* 17, 2023, 901–916 https://doi.org/10.1007/s11590-022-01871-z

[2] **Mijajlović, N.; Zajmović, A.; Jaćimović.** M. A Forward–Backward–Forward Algorithm for Quasi-Variational Inequalities in the Moving Set Case. *Mathematics* 2025, 13, 1956. https://doi.org/10.3390/math13121956

[3] **N. Mijajlović, A. Zajmović and M. Jaćimović.** "Some Modifications of the Standard Gradient Descent Method," 2025 6th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI), Baku, Azerbaijan, 2025, pp. 1-5, doi: 10.1109/PCI66488.2025.11219811.

Contraction Property and Faber–Krahn Inequality for Certain Classes of Log-Subharmonic Functions on the Unit Sphere

Vladan Jaguzović

Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka
e-mail: vladan.jaguzovic@pmf.unibl.org
ORCID: 0009-0009-1273-8495

Petar Melentijević

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: petar.melentijevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-4343-7459

Abstract. In this work, we construct weights and a family of weighted Bergman spaces on the unit sphere for which the monotonicity property holds. As a consequence we obtain the local concentration inequality for log-subharmonic functions, along with its stability version.

Keywords: harmonic function; subharmonic function; isoperimetric inequality; Bergman spaces.

Banach bimodule-valued positive maps: inequalities and representations

Stefan Ivković
MI SANU
e-mail: stefan.iv10@outlook.com
ORCID: 0000-0003-2248-8206

Abstract. Representations induced by general positive sesquilinear maps with values in ordered Banach bimodules such as commutative and non-commutative L^1-spaces and the spaces of bounded linear operators from a C^*-algebra into the dual of another C^*-algebra are considered. As a starting point, a generalized Cauchy-Schwarz inequality is proved for these maps and a representation of bounded positive maps from a (quasi) $*$-algebra into such an ordered Banach bimodule is derived and some more inequalities for these maps are deduced. In particular, an extension of Paulsen's modified Kadison-Schwarz inequality for 2-positive maps to the case of general positive maps from a unital $*$-algebra into the space of trace-class operators on a separable Hilbert space and into the duals of von-Neumann algebras is obtained. Also, representations for completely positive maps with values in an ordered Banach bimodule and Cauchy-Schwarz inequality for infinite sums of such maps are provided. Concrete examples illustrate the results.

Keywords: Representations, modules, positive sesquilinear maps, completely positive sesquilinear maps, normed spaces.

References

[1] **G. Bellomonte, S. Ivković, C. Trapani,** Banach bimodule-valued positive maps: inequalities and representations, *https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.24113 (2025), to appear in Banach Journal of Mathematical Analysis.*

[2] **G. Bellomonte, S. Ivković, C. Trapani, GNS.** Construction for C*-Valued Positive Sesquilinear Maps on a quasi *-algebra, *Mediterr. J. Math. 21 (2024) art. n. 166 (22 pp.).* .

[3] **G. Bellomonte, B. Đorđević, S. Ivković,** On representations and topological aspects of positive maps on non-unital quasi *- algebras, *Positivity 28 (2024) art. n. 66 (29 pp.).* .

Extensible Java Bytecode Data-Flow Analysis JVMCI Framework

Aleksandar Stefanović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: aleksandar.stefanovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0009-8676-9462

Ivan Ristović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: ivan.ristovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-1679-3848

Milena Vujošević Janičić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: milena.vujosevic.janicic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-5396-0644

Abstract. Static program analysis is the analysis of programs without their execution. It has various applications, including error detection, code optimization, code style compliance checking, and formatting. In the area of compiler development, an often-used static analysis technique is data-flow analysis [1]. Based on the provided abstract program state representation, instruction transfer functions, and the control-flow merge function, a data-flow analysis computes an abstract execution state at each point of the program.

We present an extensible, intraprocedural data-flow analysis framework for Java bytecode and its implementation within *GraalVM Native Image* [2], an ahead-of-time compiler for Java programs. Unlike existing and widely used Java bytecode manipulation and analysis libraries, such as ASM 4.0 [3], the implemented framework relies on the Java Virtual Machine Compiler Interface (JVMCI) for access to method bytecode. The framework is currently used for static resolution of reflective method invocations in *GraalVM* [4, 5], and arbitrary forward data-flow analyses can be implemented on top of it.

Keywords: Static analysis; Bytecode analysis; Java; GraalVM;

References

[1] **Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman.** Compilers: Principles, Techniques, and Tools (Second Edition).
[2] **Oracle.** GraalVM. https://www.graalvm.org/
[3] **Eric Bruneton.** ASM 4.0 — A Java bytecode engineering library.
[4] **Aleksandar Stefanović, Ivan Ristović, Milena Vujošević Janičić.** Constant Folding of Reflective Calls via Static Analysis of Java Bytecode. In Proceedings of the Fourteenth Symposium "Mathematics and Applications".
[5] **Aleksandar Stefanović.** Razrešavanje reflektivnih poziva statičkom analizom Java bajtkoda. Master's thesis, University of Belgrade — Faculty of Mathematics.

Improving ML-Based Static Profiling Using Method Names

Stefan Milenković

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle, Belgrade
e-mail: stefan.milenkovic@matf.bg.ac.rs

Milan Čugurović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle, Belgrade
e-mail: milan.cugurovic@matf.bg.ac.rs

Milena Vujošević Janičić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle, Belgrade
e-mail: milena.vujosevic.janicic@matf.bg.ac.rs

Abstract. Profile-guided optimizations (PGO) can yield substantial performance improvements or reduce the binary size of generated programs. Despite these benefits, PGO is still not widely adopted because it relies on dynamic profiling, which places non-trivial demands on developers by requiring them to identify suitable workloads for profile data collection. To mitigate this cost, several static profiling techniques have been proposed [1], with recent approaches leveraging machine learning for more accurate predictions [2, 3]. These techniques typically estimate branch probabilities from feature sets that capture static branch information, such as control-flow structure, basic-block properties, and branch-instruction types.

In this work, we employ a gradient-boosted binary classifier to predict method hotness in the GraalVM Native Image compiler [4], with a focus on minimizing binary size. We further extend existing feature sets by incorporating method-name features, which aim to improve prediction accuracy by exploiting semantic information often reflected in method names. Using GloVe embeddings [5] to encode method names, we measure an 8% reduction in binary size with only a 2% runtime performance penalty compared to a baseline model without these features.

Keywords: Static Profilers; GraalVM Native Image; Binary Size Reduction; Machine Learning.

References

[1] **Y. Wu, J. R. Larus.** Static branch frequency and program profile analysis. In: *Proceedings of the 27th annual international symposium on Microarchitecture (MICRO 27)*, 1994, 1—11

[2] **M. Čugurović, M. Vujošević Janičić, V. Jovanović, Thomas Würthinger.** GraalSP: Polyglot, efficient, and robust machine learning-based static profiler. In: *Journal of Systems and Software*, 2024, 213, 112058.

[3] **A. A. Moreira, G. Ottoni, F. M. Q. Pereira.** VESPA: Static Profiling for Binary Optimization. In: *Proc. ACM Program. Lang.*, 2021, 5 (OOPSLA), 144.

[4] **C. Wimmer, C. Stancu, P. Hofer, V. Jovanović, P. Wögerer, P. B. Kessler, O. Pliss, T. Würthinger.** Initialize once, start fast: application initialization at build time. In: *Association for Computing Machinery*, 2019, 3 (OOPSLA), 184.

[5] **J. Pennington, R. Socher, C. D. Manning** GloVe: Global Vectors for Word Representation. In: *Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)*, 2014, 1532–1543.

Metrics Visualization Using Profiling-Based Adaptive GC Policy for Serverless

Milica Karličić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: milica.karlicic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0004-7553-3909

Ivan Ristović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: ivan.ristovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-1679-3848

Milena Vujošević Janičić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: milena.vujosevic.janicic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-5396-0644

Abstract. In serverless, applications operate under strict performance and resource-usage constraints, making memory efficiency a critical aspect of system design [1]. One approach to improving efficiency is to reduce the memory footprint through informed garbage-collection (GC) decisions [2]. In this work, we present the GC Hints system that enables dynamic, workload-aware GC triggering using GC Hints policy [3] and introduce a new monitoring and visualization framework in serverless workloads.

The GC Hints system is implemented within the GraalVM Serial GC [4]. It collects detailed runtime statistics, GC counters, memory-usage trends, and per-request execution times. These metrics are captured at the beginning and end of each request, enabling detailed analysis of application behavior. The visualization framework shows heap occupancy and GC activity over time, allowing us to gain deeper insight into application execution patterns and to evaluate the effectiveness of the GC Hints policy in comparison to the default policy. The visualizations also serve as a diagnostic tool, highlighting outliers or unexpected program behavior. We evaluate the system using a suite of benchmarks [5] and microbenchmarks. Our results demonstrate that the policy improves memory-usage characteristics and contributes to more predictable performance across representative serverless workloads.

Keywords: Serverless; Garbage-Collection; *GraalVM*.

References

[1] **Paul Castro, Vatche Ishakian, Vinod Muthusamy, and Aleksander Slominski.** The rise of serverless computing. *Communications of the ACM*, 62(12):44–54, 2019.

[2] **Dries Buytaert, Kris Venstermans, Lieven Eeckhout, and Koen De Bosschere.** GCH: Hints for triggering garbage collections. *Transactions on High-Performance Embedded Architectures and Compilers I*, pages 74–94, 2007.

[3] **Milica Karličić, Ivan Ristović, Milena Vujošević Janičić.** *Profiling-Based Adaptive GC Policy for Serverless*, Symposium MATHEMATICS AND APPLICATION, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 2024, Vol. XIV.

[4] **Christian Wimmer et al.** Initialize once, start fast: application initialization at build time. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, OOPSLA (2019): 1–29.

[5] **Barista 2025.** Barista is a modern, open, and diversified benchmark suite for the JVM, aimed at testing JIT and AOT compilers, garbage collectors, profilers, analyzers and other tools. *Barista Documentation*, 2025. Online at: `https://barista-benchmarks.github.io/`.

The invariant Laplacian–Poisson equations and applications

Miodrag Mateljević

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-9226-0023

Abstract. We investigate solutions of the Dirichlet problem for the invariant Laplacian–Poisson equation in the n-dimensional space. Specifically, we consider their representation and Lipschitz-type continuity. As an application, we consider k-hyperbolic quasiregular mappings.

The author has recent works on the topic of this announcement by M. Arsenović, A. Khalfallah, J. Chen, Q. Li, E. Sevost'yanov, M. Knežević, M. Svetlik, N. Mutavdžić, J. Gajić and B. Purtić and we can consider all of them as co-authors of this lecture.

Keywords: invariant Laplacian–Poisson equation; Lipschitz-type continuity; k-hyperbolic quasiregular mappings.

References

[1] **M. Mateljević, N. Mutavdžić.** On Lipschitz Continuity and Smoothness up to the Boundary of Solutions of Hyperbolic Poisson's Equation. *J Geom Anal.*, **34**, 83 (2024).

[2] **J. Chen, Q. Li, M. Mateljević, N. Mutavdžić, B. Purtić.** Lipschitz-type Continuity for Solutions of the Invariant Laplacian Poisson Equations. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 48, 148 (2025).

[3] **M. Knežević, M. Mateljević, M. Svetlik.** Some Estimates for Hyperbolic Derivative for HQC Mappings and Applications. *Results Math.*, **80**, 229 (2025).

A Limit Theorem for the Normalized Maximum of Gaussian Processes

Goran Popivoda

University of Montenegro, Faculty of Science and Mathematics
e-mail: goranp@ucg.ac.me
ORCID: 0000-0003-0196-7419

Abstract. The central question in extreme value theory is to understand the behavior of the maximum of a random process over an extended period. Specifically, can we identify normalizing constants a_T and b_T such that the normalized maximum $a_T(M(T) - b_T)$ converges to a non-degenerate distribution, as $T \to \infty$? The theory for stationary processes is well-developed. Our goal is to address one of the simplest yet non-trivial cases of non-stationarity: a stationary Gaussian process to which a deterministic trend function, $g(t)$, has been added. The presence of this trend breaks the stationarity and fundamentally alters the problem, necessitating a modified approach to classical methods.

Keywords: stationary Gaussian processes; asymptotic theory; limit theorem; normalized maximum

Representation and characterization of rapidly varying functions

Nebojša Elez

Faculty of Philosophy, University of East Sarajevo
e-mail: nebojsaelez@gmail.com

Dragan Đurčić

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac
e-mail: dragan.djurcic@ftn.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-7141-4724

Abstract. In this paper, we will prove the representation theorem and the characterization theorem of the class of rapidly varying functions in the sense of de Haan, for the index $+\infty$. The statements of these theorems will be given in the form of analogous theorems in the classical Karamata theory of regular variation.

Keywords: rapidly varying function; regular variation.

References

[1] **D. Djurčić, D. R. Kočinac, M. R. Žižović.** Some properties of rapidly varying sequences. *J.Math. Anal. Appl*, 2007, 327(2), 1297-1306.

[2] **D. Djurčić, A. Torgašev.** Some asymptotic relations for generalized invers. *J.Math. Anal. Appl*, 2007, 335(2), 1397-1402.

[3] **N. Elez, D. Djurčić.** Some properties of rapidly varying functions,. *J.Math. Anal. Appl*, 2013, 401(2), 888-895.

On convergence theorems for ring Q-homeomorphisms with integrable majorant

Nataliya Ilkevych
Zhytomyr Ivan Franko State University

Denys Romash
Zhytomyr Ivan Franko State University
e-mail: d.romash@num8erz.eu

Evgeny Sevost'yanov
Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7892-6186

Abstract. Everywhere further, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, is a domain in $\mathbb{R}^n$ with the Euclidean metric $|x - y|$ and the Lebesgue measure m. For $x_0 \in D$ and $r > 0$ put $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, and for a compact $K \subset D$ define $d(K, \partial D) = \inf\{|x - y| : x \in K, y \in \partial D\}$. Let $Q : D \to [0, \infty]$ be measurable.

A homeomorphism $f : D \to \mathbb{R}^n$ is called a ring Q-homeomorphism at $x_0 \in D$ with respect to (p, q)-moduli if for every $0 < r_1 < r_2 < d(D)$,

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2), A(x_0, r_1, r_2)))) \leq \int\limits_{A(x_0, r_1, r_2) \cap D} Q(x)\, \eta^q(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

for all measurable $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ satisfying

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1, \tag{4}$$

where $A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in D : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$.

A domain D is a QED-domain if there exists $A \geq 1$ such that

$$M(\Gamma(E, F, \mathbb{R}^n)) \leq A \cdot M(\Gamma(E, F, D)) \tag{5}$$

for all continua $E, F \subset D$.

Given $A \geq 1$, $\delta > 0$ and $K \subset D$ compact, denote by $\mathfrak{F}^{A,\delta}_{K,Q}(D)$ the family of all mappings $f : D \to \mathbb{R}^n$ satisfying (1)–(2), such that $D_f := f(D)$ is a QED-domain with constant A in (3) and $d(f(K), \partial D_f) > \delta$.

The main result of the corresponding paper establishes the lower estimate

$$|f(x) - f(y)| \geq C_1 \exp\left\{ - \frac{\|Q\|_1 A}{C\, |x - y|^{\,n}} \right\}, \qquad x, y \in K, \tag{6}$$

valid for all $f \in \mathfrak{F}^{A,\delta}_{K,Q}(D)$. Using this estimate, we obtain the following convergence theorem.

Theorem. *Let* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, and let $f_m : D \to \mathbb{R}^n$ be homeomorphisms of the class $\mathfrak{F}^{A,\delta}_{K,Q}(D)$ converging locally uniformly in D to f. If $K = \overline{G}$ and G is a compact subdomain of D, then for $Q \in L^1(D)$ the limit mapping f is a homeomorphism in G.

Keywords: ring Q-homeomorphisms; lower distance estimates; QED-domains; convergence theorems.

Koebe theorem for mappings with inverse moduli inequalities

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7892-6186

Valery Targonskii

Zhytomyr Ivan Franko State University
e-mail: w.targonsk@gmail.com

Abstract. Below $dm(x)$ denotes the element of the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$. Everywhere further the boundary ∂A of the set A and the closure $\overline{A}$ should be understood in the sense of the extended Euclidean space $\overline{\mathbb{R}^n}$. Let $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ and $A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}$. Given $x_0 \in \mathbb{R}^n$, we put $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = S(0, 1)$. A mapping $f : D \to \mathbb{R}^n$ is called discrete if the pre-image $\{f^{-1}(y)\}$ of any point $y \in \mathbb{R}^n$ consists of isolated points, and open if the image of any open set $U \subset D$ is an open set in $\mathbb{R}^n$. Given sets E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ and a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ we denote by $\Gamma(E, F, D)$ the family of all paths $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ such that $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in D$ for $t \in (a, b)$. Given a mapping $f : D \to \mathbb{R}^n$, a point $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, and $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, we denote by $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ a family of all paths γ in D such that $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Let $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ be a Lebesgue measurable function. The following statement holds.

Theorem. *Let* D be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, and let $B(x_0, \varepsilon_1) \subset D$ for some $\varepsilon_1 > 0$. Assume that, D' is bounded domain and for each point $y_0 \in D'$ and for every $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0|$ there is a set $E \subset [r_1, r_2]$ of a positive linear Lebesgue measure such that the function Q is integrable with respect to $\mathcal{H}^{n-1}$ over the spheres $S(y_0, r)$ for every $r \in E$. In addition, assume that one of the following conditions hold:

1) $Q \in FMO(\overline{D'})$; 2) for any $y_0 \in \overline{D'}$ there is $\delta(y_0) > 0$ such that $\int\limits_{\delta}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$ for sufficiently small $\delta > 0$ and, in addition, $\int\limits_{0}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty$ holds (where $q_{y_0} = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(y_0, r)} Q(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$, $\omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$). Then there is $r_0 > 0$, which does not depend on f, such that

$$f(B(x_0, \varepsilon_1)) \supset B(f(x_0), r_0) \qquad \forall\, f \in \mathfrak{F}_{E,\delta}(D, D')\,.$$

Keywords: quasiregular mappings, quasiconformal mappings, Koebe theorem.

On prime ends extension for one class of mappings

Zarina Kovba

Zhytomyr Ivan Franko State University
e-mail: mazhydova@gmail.com
ORCID: 0009-0008-1519-0907

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7892-6186

Abstract. Let $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ and $A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}$. Given sets E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ and a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ we denote by $\Gamma(E, F, D)$ a family of all paths $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ such that $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in D$ for $t \in (a, b)$. If $f : D \to \mathbb{R}^n$, $y_0 \in f(D)$ and $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, then by $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ we denote the family of all paths γ in D such that $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Let $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ be a Lebesgue measurable function. In what follows, $M(\cdot)$ is a modulus of families of paths. The boundary of D is called weakly flat at the point $x_0 \in \partial D$, if for every $P > 0$ and for any neighborhood U of the point x_0 there is a neighborhood $V \subset U$ of the same point such that $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ for any continua $E, F \subset D$ such that $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ and $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. The boundary of D is locally quasiconformal, if every $x_0 \in \partial D$ has a neighborhood U that admits a quasiconformal mapping φ onto $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ such that $\varphi(\partial D \cap U)$ is the intersection of $\mathbb{B}^n$ and a coordinate hyperplane. The sequence of cuts σ_m, $m = 1, 2, \ldots$, is called regular, if $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \varnothing$ for $m \in \mathbb{N}$ and, in addition, $d(\sigma_m) \to 0$ as $m \to \infty$. If the end K contains at least one regular chain, then K will be called regular. We say that a bounded domain D in $\mathbb{R}^n$ is regular, if D can be quasiconformally mapped to a domain with a locally quasiconformal boundary whose closure is a compact in $\mathbb{R}^n$, and, besides that, every prime end in D is regular. Note that space $\overline{D}_P = D \cup E_D$ is metric. If $g : D_0 \to D$ is a quasiconformal mapping of a domain D_0 with a locally quasiconformal boundary onto some domain D, then for $x, y \in \overline{D}_P$ we put $\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|$, where the element $g^{-1}(x)$, $x \in E_D$, is to be understood as some (single) boundary point of the domain D_0. Assume that, $D' \setminus C(f, \partial D) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i$, where D_i is a regular domain for $1 \leqslant i \leqslant N$, $D_i \cap D_j = \varnothing$ for $i \neq j$. We set $\rho_j(x, y) = 0$ for $x, y \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{D_i}_P \setminus \overline{D_j}_P$, and $\rho_j(x, y) = 1$ for $x \in \overline{D_j}_P$ and $y \notin \overline{D_j}_P$. Then ρ_j is a pseudometric on $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{D_i}_P$. Set $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{N} 2^{-i} \frac{\rho_i(x,y)}{1+\rho_i(x,y)}$. Observe that, $\rho_j^*(x, y) := \frac{\rho_j(x,y)}{1+\rho_j(x,y)}$ and $\rho(x, y)$ are metrics.

Theorem. *Let D and D' be domains in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, and let D be a domain with a weakly flat boundary. Suppose that f is open discrete mapping of D onto D' satisfying the relation $M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y)$ holds at each point $y_0 \in \overline{D'}$ and for any Lebesgue measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. In addition, assume that the following conditions are fulfilled: 1) for each point $y_0 \in \partial D'$ there is $0 < r_0 := \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0|$ such that for any $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0|$ there exists a set $E \subset [r_1, r_2]$ of positive linear Lebesgue measure such that Q is integrable on $S(y_0, r)$ for $r \in E$; 2) $D' \setminus C(f, \partial D)$ consists of finite number of pairwise disjoint domains $D_1, D_2, \ldots, D_N$ any of which is regular; 3) $f^{-1}(C(f, \partial D) \cap D')$ is nowhere dense. Then the mapping f has a boundary extension $\overline{f} : \overline{D} \to \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{D_i}_P \cup D'$ which is continuous in $\overline{D} \setminus f^{-1}(C(f, \partial D) \cap D')$ by the metric ρ defined as above. Moreover, $\overline{f}(\overline{D}) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{D_i}_P \cup D'$.*

Keywords: quasiregular mappings, quasiconformal mappings, singularities, manifolds.

On isolated singularities of some class of mappings on Riemannian manifolds

Victoria Desyatka

Zhytomyr Ivan Franko State University
e-mail: zehrerviktoria@gmail.com
ORCID: 0009-0003-2241-401X

Evgeny Sevost'yanov

Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
e-mail: esevostyanov2009@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7892-6186

Abstract. Let $\mathbb{M}^n$ and $\mathbb{M}^n_*$ be Riemannian manifolds of dimension n with geodesic distances d and d_*, respectively, and let D be a domain in $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$. Set $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < r\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r\}$, $A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{M}^n_* : r_1 < d_*(y, y_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Let $dv(x)$ and $dv_*(x)$ be elements of volumes on $\mathbb{M}^n$ and $\mathbb{M}^n_*$, respectively. A Borel function $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$ is called admissible for the family Γ of paths γ in $\mathbb{M}^n$, if $\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geqslant 1$ for $\gamma \in \Gamma$. In this case we write: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Let $p \geqslant 1$, then p-modulus of Γ is defined by the relation $M_p(\Gamma) = \inf\limits_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x)\, dv(x)$. Set $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$. Let $Q\colon D \to [0, \infty]$ be a measurable function. Denote by $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Given sets E, F and G in $\mathbb{M}^n$, denote by $\Gamma(E, F, G)$ the family of all paths $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}^n$ joining E and F in G. Given $f : D \to \mathbb{M}^n$ and $y_0 \in f(D)$, denote by $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ the family of all paths γ in the domain D such that $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. We say that f satisfies the inverse Poletsky inequality at the point $y_0 \in f(D)$, if the inequality

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(d_*(y, y_0))\, dv_*(y) \tag{7}$$

holds for an arbitrary Lebesgue measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{8}$$

Set $q_{x_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$, where $d\mathcal{A}$ denotes the element of the surface area on $S(x_0, r)$. Let $\overline{\mathbb{M}^n} := \mathbb{M}^n \cup \{\infty\}$, and let $h : \overline{\mathbb{M}^n} \times \overline{\mathbb{M}^n} \to \mathbb{R}$ be a metric on $\overline{\mathbb{M}^n}$. Suppose that the manifold $\mathbb{M}^n$ is connected, then d is a metric on $\mathbb{M}^n$. We say that h satisfies the condition weak sphericalization, if $(\overline{\mathbb{M}^n}, h)$ is a compact metric space and h and d generate the same topology on $\mathbb{M}^n$. The following statement is true.

Theorem. ([1]). *Let $n \geqslant 2$, D be a domain in $\mathbb{M}^n$, let $x_0 \in D$, let $a, b \in \mathbb{M}^n_*$, $a \neq b$ and let $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{M}^n_* \setminus \{a, b\}$ be an open discrete mapping that satisfies the conditions (7)–(8) at all points $y_0 \in \overline{D'}$, where $D' := f(D \setminus \{x_0\})$. Suppose that the manifold $\mathbb{M}^n_*$ is connected and admits the condition of weak sphericalization. Suppose that, in addition, that for each point $y_0 \in \overline{D'}$ there exists $r_0 = r_0(y_0) > 0$ such that $q_{y_0}(r) < \infty$ for a.a. $r \in (0, r_0)$. Then f has a continuous, open and discrete extension $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{M}^n}$, whose continuity should be understood in the sense of the metric h.*

Keywords: quasiregular mappings, quasiconformal mappings, singularities, manifolds.

References

[1] **V. Desyatka, E. Sevost'yanov.** Removable singularities of mappings with inverse Poletsky inequality on Riemannian manifolds. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2024, 76, 1097–1107.

Summation techniques in Banach algebras and modules, with applications

Zora Lj. Golubović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: z.golubovic@yahoo.com
ORCID: 0000-0003-0442-9368

Bogdan D. Đorđevic

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
e-mail: bogdan.djordjevic@turing.mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0000-0002-6751-6867

Abstract. This contribution explores advanced summability methods in the setting of Banach algebras and Banach modules, with a particular emphasis on their application to the study of 'hyperharmonic' series.

Lecture firstly gives a comparative overview of Laplace transforms in real space setting, Banach spaces, Banach algebras and Banach modules, as well as analysis of procedure proposed earlier by Gautchi and Milovanovic.

Through the lens of Laplace transform and within the mentioned framework, we establish a connection with the hypergeometric and polygamma functions, thus lifting some known scalar series identities to this abstract setting.

Moreover, we extend our results to the multilateral modular series, having the form

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1+k)^{-n_1}c_1(a_2+k)^{-n_2}c_2\cdot\ldots(a_{m-1}+k)^{-n_{m-1}}c_{m-1}(a_m+k)^{-n_m},$$

where a_i belong to possibly different Banach algebras, and c_j belong to possibly different Banach bimodules, and n_1, ..., n_m are positive integers.

We obtain sums for series of the form

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a+k)^{-n},\quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(a+k)^{-n},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left((a+k)^{\dagger}\right)^n,$$

where † represents the Drazin-Koliha invertibility, or the invertibility along an idempotent.

As an application, we obtain a new necessary solvability condition for the Sylvester equation $ax-xb=c$ in Banach modules. Finally, the connection to $C0-$semigroups is given.

Keywords: Banach algebras and modules; Hyperharmonic series; Laplace transform; Generalized inverses; C0-semigroups.

References

[1] **Đorđevic B. D, Golubović Z. Lj.** Summing various types of hyperharmonic series in Banach algebras and Banach modules. *Filomat* ***(accepted for publication)***, 2025

[2] **Golubović Z.** On calculating sums of slowly convergent series. *MAT-KOL*, 2022, 28, 11–17.

[3] **Đorđević B. D.** Operator algebra generated by an element from the module $\mathcal{B}(V_1, V_2)$. *Complex Analysis Operator Theory*, 2019, 13, 2381—2409

[4] **Gautschi W, Milovanović G. V.** Gaussian quadrature involving Einstein and Fermi functions with an application to summation of series. *Mathematics of Computation*, 1985, 44, 177–190.

[5] **Đorđević D. S, Rakočević V.** Lectures on generalized inverses. University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš 2008. pp. 16–20.

Flexible MCAR testing for missing data with correlated response indicators

Danijel G. Aleksić

University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Faculty of Mathematics,
e-mail: danijel.aleksic@fon.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-0460-400X

Abstract. One of the most widely used tests for the missing completely at random (MCAR) assumption is Little's test [3] from 1988. However, as noted in 2024 by Aleksić [1], this test can suffer from substantial type I error distortion and loss of power when the data deviate from multivariate normality. Aleksić's test [1] performs better under such departures, but it is limited to a very narrow class of detectable alternatives. Its subsequent generalization [2] broadens the range of alternatives but introduces a new restriction: the response indicators must be uncorrelated. Here, we present a further generalization of this test that removes this assumption, and we compare its performance to both the original version and Little's MCAR test.

Keywords: MCAR; U-statistics; asymptotics.

References

[1] **D. Aleksić.** A novel test of missing completely at random: U-statistics-based approach. *Statistics*, 2024, 58(4), 1004–1023.

[2] **D.G. Aleksić.** A generalization of a U-statistics-based MCAR Test: Utilizing Partially Observed Variables. *arXiv preprint arXiv:2501.05596.*

[3] **R.J.A. Little.** A test of missing completely at random for multivariate data with missing values. *Journal of the American statistical Association*, 1988, 83.

On the moment-angle manifolds of LS-category two

Ivan Limonchenko

Mathematical Institute SASA
e-mail: ivan.limoncenko@turing.mi.sanu.ac.rs
ORCID: 0000-0002-2072-8475

Abstract. Lusternik-Schnirelmann category (LS-category) is an important homotopy invariant of a topological space X: one says that $\mathrm{cat}(X) = n$ if $n+1$ is the smallest number of open subsets U_i that cover X such that the inclusion $U_i \hookrightarrow X$ is nullhomotopic. In particular, spheres have LS-category one; in fact, $\mathrm{cat}(X) = 1$ if and only if X is a co-H-space. Moreover, for any space X, its cohomology length $\mathrm{cup}(X)$ is a lower bound for its LS-category $\mathrm{cat}(X)$, and when X is a manifold, $\mathrm{cat}(X)$ is a lower bound for the number of critical points that a real-valued map on X can have.

In this talk, we are interested in calculating LS-category for moment-angle manifolds, the main object of study in toric topology [1]. If (X, A) is a topological pair and K is an abstract simplicial complex on $[m] := \{1, 2, \ldots, m\}$, then the polyhedral product $(X, A)^K$ is defined to be a subspace of X^m determined by the property that for $x := (x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon [m] \to X$ we have $x \in (X, A)^K$ if and only if $x^{-1}(A^c) \in K$. The real moment-angle-complex $\mathcal{R}_K := (\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)^K$ and the complex moment-angle-complex $\mathcal{Z}_K := (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^K$ acquire an equivariant smooth structure if K is a starshaped sphere; in particular, we get smooth manifolds when K is a polytopal sphere, i.e. the boundary of a simplicial polytope. For a moment-angle manifold, $\mathcal{R}_K$ and $\mathcal{Z}_K$, its LS-category is one if and only if K is the boundary of a simplex. Therefore, the case of LS-category two is the first non-trivial case to study and the following conjecture arises.

Цоњецтуре: Let K be a chordal starshaped sphere; that is, the graph of K has no induced cycles of length greater than three. Then the following conditions are equivalent:

- $\mathrm{cat}(\mathcal{R}_K) = 2$;
- $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_K) = 2$;
- $\mathcal{R}_K$ is homeomorphic to a connected sum of sphere products with two spheres in each product;
- $\mathcal{Z}_K$ is homeomorphic to a connected sum of sphere products with two spheres in each product.

We are going to show that this conjecture is true in a wide class of starshaped spheres, which includes all stacked spheres i.e. spheres obtained from the boundary of a simplex by consecutive stellar subdivisions of facets, and relate it to the algebraic properties of the Stanley-Reisner ring of K studied in combinatorial commutative algebra.

Keywords: Lusternik-Schnirelmann category; moment-angle manifold; stacked sphere.

References

[1] **V. M. Buchstaber, T. E. Panov.** Toric Topology. *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 204, 518pp.

Some Properties of FGSI Spaces of Sobolev Type and Applications

Aleksandar Aksentijević

Faculty of Science, University of Kragujevac
e-mail: aksentijevic@kg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-6009-0891

Suzana Aleksić

Faculty of Science, University of Kragujevac
e-mail: suzana.aleksic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-2176-5091

Stevan Pilipović

Faculty of Sciences, University of Novi Sad
e-mail: pilipovic@dmi.uns.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5443-4467

Abstract. In this presentation, we present results from [4], which extend our previous work [1–3] on the study of structural properties of finitely generated shift-invariant (FGSI) subspaces of Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$. These spaces are generated by a finite set of generators $\{\phi_1, \dots, \phi_m\} \subset H^s(\mathbb{R}^d)$, $m \in \mathbb{N}$, and consist of functions $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ that are convergent series of the generators' integer translations: $V_s(\phi_1, \dots, \phi_m) = \left\{ f \in H^s(\mathbb{R}^d) : f = \sum_{i=1}^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^i \phi_i(\cdot - k) \right\}$. We investigate the behavior of FGSI spaces under convolution and product, utilizing Fourier transform techniques to establish their key properties. One of the key results of our study is the structural characterization of the dual FGSI space, providing deeper insight into their functional structure. Using classical results from functional analysis, we show that a certain class of equations with right-hand sides in FGSI spaces has solutions within the same FGSI space. We also characterize the convolutors of FGSI spaces and determine the wave front sets of convolutions and products within these spaces. Our findings contribute to the deeper understanding of shift-invariant structures in Sobolev spaces and have potential applications in signal processing, PDE theory, and harmonic analysis.

The presentation concludes with a discussion of current research and applications. We prove the stability of the dual generator in certain weighted Wiener amalgam spaces and establish a necessary Nyquist-type density condition for stable non-uniform sampling in $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$; the extension of this framework to the case of generalized sampling for $s \leqslant d/2$ is the subject of our ongoing investigation. Furthermore, we show how these results provide a rigorous foundation for constructing stable and convergent Petrov-Galerkin schemes for solving elliptic PDEs, as well as for stable image reconstruction in Magnetic Resonance Imaging (MRI).

This research was supported by the Science Fund of the Republic of Serbia, Grant No. 2727, *Global and local analysis of operators and distributions - GOALS*.

Keywords: shift-invariant spaces; sampling; Sobolev spaces.

References

[1] **A. Aksentijević, S. Aleksić and S. Pilipović.** The structure of shift-invariant subspaces of Sobolev spaces. *Theor Math Phys*, 2024, 218, 177–191.

[2] **A. Aksentijević, S. Aleksić and S. Pilipović.** Shift-Invariant Subspaces of Sobolev Spaces and Shift-Preserving Operators. *Analysis, Approximation, Optimization: Computation and Applications. Springer Optimization and its Applications*, 2025, vol. 224.

[3] **A. Aksentijević, S. Aleksić and S. Pilipović.** On the product of periodic distributions. Product in shift-invariant spaces. *Filomat*, 2024, 38, 8011–8021.

[4] **A. Aksentijević, S. Aleksić and S. Pilipović.** Convolution and product in finitely generated shift-invariant spaces. *submitted*, also, it is posted on arXiv, 2025.

Quasiconformal groups

Vladimir Marković

Yau Mathematics Sciences Center, Tsinghua University, China
e-mail: vlad.markovic.work@gmail.com

Abstract. In this talk, I will survey the theory of quasiconformal and convergence groups whose study began with the work of Gehring and Martin. I will focus on explaining why quasiconformal group actions are rigid on low dimensional spheres. The analogous problem for convergence groups is open and is closely related with the Hyperbolization theorem for 3-manifolds.

Keywords: quasiconformal; quasisymmetric; Beltrami equation; hyperbolization theorem; Cannon conjecture.

References

[1] **F. Gehring, G. Martin.** Discrete quasiconformal groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1987, 55, 331–358.
[2] **V. Marković.** Quasisymmetric groups. *Journal of American Mathematical Society*, 2006, No. 3, 673–715.
[3] **P. Tukia.** On two-dimensional quasiconformal groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A I Math., 1980, No. 1, 73–78.

Realizations by finite-area quadratic differentials

Dragomir Šarić

Institute for Advanced Study, Princeton, NY, USA
e-mail: Dragomir.Saric@qc.cuny.edu
ORCID: 0000-0002-9895-6582

Abstract. Hubbard and Masur proved that any measured foliation on a closed Riemann surface can be realized by the horizontal foliation of a holomorphic quadratic differential. We extend this result to arbitrary Riemann surfaces (including the unit disk, or any infinite genus surface) by characterizing measured foliations that can be realized by the horizontal foliations of finite-area holomorphic quadratic differentials. Some corollaries of this characterization include application to the type problem of Riemann surfaces. Another direction shows that the differentials with one cylinder are dense in the L^1 norm among all differentials when the Riemann surface does not have Green's function. In a recent joint work with T. Shima, we showed that this is false for Riemann surfaces of infinite complexity whose covering group is of the second kind. Finally, we give a characterization of the Teichmuller extremal maps in terms of the height map. Supported in part by NSF DMS-2521870.

Keywords: measured foliations; holomorphic quadratic differentials; Riemann surfaces; Green functions; Teichmüller extremal maps.

Integration of Measure Valued Mappings

Miloš Arsenović

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Serbia
e-mail: milos.arsenovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5450-2407

Vladimir Bogachev

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: vibogach@mail.ru
ORCID: —

Mihailo Krstić

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Serbia
e-mail: mihailo.krstic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-3575-3216

Abstract. Several normed spaces of measurable, in certain sense, mappings with values in the space of signed measures are studied. Completness of these space is investigated as well as integrals of such mappings. It is shown that the integrals of such mappings are countably additive and integration with respect to this integral is also considered. We also study the case when the base space is a metric space and in this situation we consider Kantorovich - Rubinstein norm. This is joint work with V. Bogachev and M. Krstić.

Keywords: weak integals; signed measures; Kantorovich - Rubistein norm.

References

[1] **M. Arsenović, V. Bogachev, M. Krstić.** Spaces of measure-valued mappings connected with disintegrations. *Siberian Math. Journal*, 2025, 66 No. 2, 248–261.

Lipschitz-Type Conditions for Harmonic Functions on Non-Smooth Domains

Marijan Marković

Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro
e-mail: marijanmmarkovic@gmail.com
ORCID: 0009-0000-9896-8068

Abstract. This talk focuses on Lipschitz-type conditions for real-valued harmonic functions defined on domains whose boundaries are not necessarily smooth. The aim is to compare restricted local Lipschitz continuity with global Lipschitz continuity, exploring how boundary irregularities affect the harmonic behavior of functions.

Keywords: Harmonic functions; Lipschitz continuity; Non-Smooth and Unbounded Lipschitz domains.

References

[1] **M. Marković.** A condition equivalent to the Hölder continuity of harmonic functions on unbounded Lipschitz domains. *Communications in Contemporary Mathematics*, to appear.
[2] **M. Marković.** Lipschitz conditions on bounded harmonic functions on the upper half-space *Illinois Journal of Mathematics*, 2024, 68, 741–754.
[3] **M. Pavlović.** Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2007, 23, 831–845.

Toeplitz operators, integral geometry and dynamics of spectra

Alexey Karapetyants

Southern Federal University
e-mail: karapetyants@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6205-3624

Irina Smirnova

Don State Technical University
e-mail: irinasmiy@yandex.ru

Abstract. We present classical and recent results for weighted spaces of analytic functions in the unit disc and upper half-plane, as well as Toeplitz operators in these spaces, with special symbols associated with three types of hyperbolic geometry in the unit disc. The study focuses on the change in the properties of Toeplitz operators with varying weight parameters. In particular, an interesting question is the limit behavior of the spectrum as the weight parameter tends to infinity. This relates the theory to the correspondence principle in Berezin's second quantization. We also discuss generalizations— the mixed norm spaces defined in terms of Fourier images.

Keywords: Toeplitz operators; Bergman-Jrbashyan spaces; Mixed norm spaces; Spaces of analytic functions.

References

[1] **Z. G. Avetisyan, A. N. Karapetyants, I. Smirnova.** Mixed Fourier norm spaces of analytic functions on the upper half-plane and Toeplitz operators. *Math. Notes*, 2025, 117, 345-356.

[2] **N.L.Vasilevski** Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space. In: *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser, 2008. – Vol. 185, 417 pp.

Isoperimetric inequality for harmonic functions

Miodrag Mateljević

Miodrag Mateljević, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Republic of Serbia
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-9226-0023

Bojana Purtić

Bojana Purtić, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Republic of Serbia
e-mail: bojana.purtic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0001-3878-773X

Abstract. A version of isoperimetric inequality holds for function f for which $\log|f|$ is subharmonic. We characterize subclass of harmonic functions which has these properties. For the class of functions $h(z_1,\dots,z_n)$, $z_i \in \mathbb{U}$, which separately has these properties, we prove a version of isoperimetric inequality. In addition, we prove a version of Gabriel's theorem for the subclass of harmonic functions.

Keywords: harmonic; isoperimetric; subharmonic;

References

[1] **M. Mateljevic.** Isoperimetric-Type Inequalities for Subharmonic Functions on the Polydisk, Capacity, Transportation Approach, and Related Problems. *Filomat 29:2*, 2015, 275-302.
[2] **T. Carleman.** Zur theorie der minimalflachen. *Math.Z.* 1921, pp. 154-160.
[3] **R. M. Gabriel.** Some Results Concerning the Integrals of Moduli of Regular Functions Along Certain Curves. *J. London Math. Soc.* 1927, 2(2):112–117.

An unified approach to existence of fixed points and convergence of iterative sequences for mappings which satisfies one linear contractive condition

Ivan D. Aranđelović

University of Belgrade – Faculty of Mechanical Engineering
e-mail: iarandjelovic@mas.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-7343-9538

Abstract. In 1906 M. Fréchet [1] introduced the notion of L spaces in which convergence of sequences are axiomatic funded. As examples, he presented classes of V, and E spaces. The class of V - spaces (called by Fréchet spaces with regular écart) is enough large to include b - metric spaces, which was defined by I. Vulpe, D. Ostrajkh and F. Khojman in 1981. In modern terminology E spaces are so called quasi - metric spaces. In [2] M. Fréchet using the same name E spaces (in [3] he used term D spaces), considered new class of spaces, named by F. Hausdorff in 1914 as metric spaces. In [3] he introduced classes of semi - metric spaces (term S spaces was used) and symmetric spaces, named by him E spaces (the same name for the third time).

Definition. *Let* X be a non-empty set, $s(X)$ set of all sequences which are belong to X, $c(X) \subset s(X)$ and $\lim : c(X) \to X$. The ordered triple $(X, c(X), \lim)$ are L space if and only if the following conditions are satisfied:

1) if $x_n = x$ for any $n \in \mathbb{N}$ then $(x_n) \in c(X)$ and $\lim(x_n) = x$;

2) if $(x_n) \in c(X)$, $\lim x_n = x$ and $(x_{n_j}) \subseteq (x_n)$ then $(x_{n_j}) \in c(X)$ and $\lim x_{n_j} = x$.

Definition. *Let* $(X, c(X), \lim)$ be arbitrary L - space, $(P, c(P), \lim_P, \leq)$ partially ordered L - space, $d : X^2 \to P$, $\Theta \in P$ such that $\theta \leq p$ for any $p \in P$ and $\mathcal{R} = \{\rho : P \to P \mid \rho \text{ is increasing, } \rho^n(p) \in c(P) \text{ and } \lim_P \rho^n(p) = \Theta \text{ for any } p \in P\}$. We said that L - space $(X, c(X), \lim)$ is d^* - complete over $(P, c(P), \lim_P, \leq)$ if $(x_n) \in s(P)$ and

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \rho^n(R), \ n \in \mathbb{N}$$

for some $R \in P$ and $\rho \in \mathcal{R}$, implies $(x_n) \in c(X)$.

Definition of $d*$ completeness include earlier concepts defined by Kasahara for L spaces defined over real numbers and Rus [4] for L spaces defined over L - space ordered semigroup with unity and least element.

In this talk will be present one unified approach to existence of fixed points and convergence of iterative sequences for mappings which satisfies one linear contractive condition, based on the following simple result.

Theorem. *Let* $(X, c(X), \lim)$ be d^* - complete L - space d^* - complete over $(P, c(P), \lim_P, \leq)$ and $f : X \to R$ sequentially continuous mapping. If there exists $\rho \in \mathcal{R}$ such that

$$d(f(x), f(y)) \leq \rho(d(x, y))$$

for any $x, y \in X$, then f has unique fixed point which is limit of all its Picard sequences.

Theorem 1 proved for mappings defined on L spaces include earlier results obtained for spaces with distance function (metric spaces, b - metric spaces, quasi metric spaces, symmetric spaces, metric spaces topological semifields, cone metic spaces, ...) and some other classes of spaces (uniform spaces, probabilistic metric spaces, fuzzy metric spaces, F type topological spaces, Generalized Kasahara spaces,...).

Keywords: fixed point; Picard sequences; L - space; d^* - completeness; Generalized Kasahara space.

References

[1] **M. Fréchet.** Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1906, 22, 1–74.

[2] **M. Fréchet.** Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1910, 30, 1–26.

[3] **M. Fréchet.** Relations entre les notions de limite et de distance. *Trans. Am. Math. Soc.,* 1918, 18, 53–65.

[4] **I. A. Rus.** Kasahara spaces. *Sci. Math. Jpn.,* 2010, 72:1, 101–110.

Nonlocal de Sitter $\sqrt{dS}$ Gravity and Cosmology

Jelena Stanković

University of Belgrade, Faculty of Education
e-mail: jelenagg@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2596-7827

Abstract. Despite its great success, the general theory of relativity is not the final theory of gravity and there are many attempts to modify it. One of very promising directions of research is the nonlocal theory of gravity. An interesting class of nonlocal gravity models, that have been recently considered, is given by $S = \frac{1}{16\pi G}\int_M \sqrt{-g}\big(R-2\Lambda+P(R)\,\mathcal{F}(\Box)\,Q(R)\big)d^4x$, where M is a pseudo-Riemannian manifold of signature $(1,3)$ with metric $(g_{\mu\nu})$, Λ is the cosmological constant, $P(R)$ and $Q(R)$ are some differentiable functions of the Ricci scalar R, $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\Box^n$ and $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$ is the corresponding d'Alembert-Beltrami operator. We consider here the nonlocal de Sitter model $\sqrt{dS}$ ($P(R) = Q(R) = \sqrt{R-2\Lambda}$) which is given by the following action: $S = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\big(R-2\Lambda+\sqrt{R-2\Lambda}\,\mathcal{F}(\Box)\,\sqrt{R-2\Lambda}\big)d^4x$. To solve the corresponding equations of motion, we first solve eigenvalue problem $\Box\sqrt{R-2\Lambda} = q\sqrt{R-2\Lambda}$, where $q = \zeta\Lambda \quad (\zeta \in \mathbb{R})$ is an eigenvalue and $\sqrt{R-2\Lambda}$ is an eigenfunction of operator $\Box$. We presented and discussed several exact cosmological solutions for homogeneous and isotropic universe. One of these solutions mimics effects that are usually assigned to dark matter and dark energy, see [1]. Some other solutions are examples of the nonsingular bounce ones in flat, open and closed universe. There are also singular and cyclic solutions. We also discuss cosmological solutions of the nonlocal gravity model which is given by $P(R) = Q(R) = R - 4\Lambda$ (see [2]). This model is also of interest as the limit case of model $P(R) = Q(R) = \sqrt{R-2\Lambda}$ for $|R| \ll |2\Lambda|$.

Keywords: nonlocal modified gravity; nonlocal de Sitter Gravity; exact cosmological solutions.

References

[1] **I. Dimitrijević, B. Dragović, Z. Rakić, J. Stanković.** Nonlocal de Sitter Gravity and its exact cosmological solutions. *JHEP12*, 2022, 054.

[2] **I. Dimitrijević, B. Dragović, Z. Rakić, J. Stanković.** New cosmological solutions of a nonlocal gravity model. *Symmetry*, 2022, 14.

Numerical differentiation of analytic functions using GAG quadrature rules on the semicircle

Marija P. Stanić

University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics and Informatics
e-mail: marija.stanic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-4785-6730

Tatjana V. Tomović Mladenović

University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics and Informatics
e-mail: tatjana.tomovic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-9758-1515

Aleksandra S. Milosavljević

University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics and Informatics
e-mail: aleksandra.milosavljevic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-2483-7676

Abstract. As stated in [1], until 1991, the numerical differentiation of analytical functions was discussed in several papers. The corresponding formulas for differentiation were mostly obtained by Cauchy's integral formula and the application of the trapezoidal rule. In paper [1], new formulas for numerical differentiation were introduced using Gaussian quadrature rules on the semicircle. In [2] generalized averaged Gaussian (GAG) quadrature rule on the semicircle are introduced with aim of better estimate of the error of Gaussian quadrature rule on the semicircle. In this paper we give formula for numerical differentiation of analytic function using GAG quadrature rules on the semicircle. Numerical examples with comparison of our results with results from papers published after 1991 are included.

Keywords: orthogonality on the semicircle; generalized averaged Gaussian quadrature rules; numerical differentiation of analytical functions.

References

[1] **F. Calio', M. Frontini, G. V. Milovanović.** Numerical differentiation of analytic functions using quadratures on the semicircle. *Comput. Math. Appl.*, 1991, 22(10), 99–106.

[2] **M. P. Stanić, T. V. Tomović Mladenović, A. S. Milosavljević.** Generalized averaged Gaussian quadrature rules on the semicircle. *Numer. Algor.*, 2025, https://doi.org/10.1007/s11075-025-02231-5

Additive properties of (b, c)-inverses

Ivana Stanišev

Universiity of Belgrade, Technical Faculty in Bor
e-mail: istanisev@tfbor.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-6477-939X

Jelena Višnjić

University of Niš, Faculty of Medicine
e-mail: jelena.visnjic@medfak.ni.ac.rs
ORCID: 0000-0002-1580-6969

Abstract. Additive properties of generalized inverses have been studied widely. There are many researches for Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, group, core and dual core inverses. Here, we present our recent results on (b, c)-invertibility of a sum of two elements in rings. We derive necessary and sufficient conditions for the sum of elements to be (b, c)-invertible. Also, as a special case, we give an explicit formula for the (b, c)-inverse of a sum and apply these results to matrices.

Keywords: (b, c)-inverse; additive properties.

References

[1] **J. Višnjić, I. Stanišev, Y. Ke.** Some properties of (b,c)-inverses in rings. *Commun. Algebra*, 2023, 51:6, 2600–2613.

[2] **I. Stanišev, J. Višnjić, D. S. Djordjević.** Equivalence relations based on (b,c)-inverses in rings. *Mediterr. J. Math.*, 2024, 21, 11.

[3] **M. P. Drazin.** Pseudoinverse in associative rings and semigroups. *Amer. Math. Monthly*, 1958, 65, 506–514.

[4] **Y. Ke, D. S. Cvetković Ilić, J. Chen, J. Višnjić.** New results on (b,c) - inverses. *Linear Multilinear Algebra*, 2028, 66:3, 447–458.

[5] **S. Xu, J. Chen, X. Zhang.** New characterizations for core inverses in rings with involution. *Frontiers of Mathematics in China*, 2017, 12:1, 231–246.

Continuity properties for a family of equations related to Schrödinger problem

Smiljana Jakšić

University of Belgrade, Faculty of Forestry
e-mail: smiljana.jaksic@sfb.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-6207-9402

Abstract.

We give the spaces of ultradifferentiable functions defined in terms of iterates of the Laguerre operator.

Дефинитион 1. Лет $h > 0$, анд $\alpha > 0$. Тхен а смоотх фунцтион f белонгс то тхе спаце $\mathbf{G}^{\alpha,h}_{\alpha,h}(\mathbb{R}^d_+)$, иф

$$\eta^{\alpha}_{h}(f) := \sup_{N\in\mathbb{N}^d} \frac{\|E^N f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}}{h^{|N|}N!^{\alpha}} < \infty. \tag{9}$$

Next, we introduce $P-$spaces on positive orthants.

Дефинитион 2. Лет $\alpha > 0$. Тхе $P-$спацес он поситиве ортхант $\mathbb{R}^d_+$, $\mathbf{G}^{\alpha}_{\alpha}(\mathbb{R}^d_+)$ анд $\mathbf{g}^{\alpha}_{\alpha}(\mathbb{R}^d_+)$ аре дефинед то бе тхе унион, респецтивелы тхе интерсецтион оф $\mathbf{G}^{\alpha,h}_{\alpha,h}(\mathbb{R}^d_+)$, щитх респецт то $h > 0$:

$$\mathbf{G}^{\alpha}_{\alpha}(\mathbb{R}^d_+) = \bigcup_{h>0} \mathbf{G}^{\alpha,h}_{\alpha,h}(\mathbb{R}^d_+), \qquad \text{анд} \qquad \mathbf{g}^{\alpha}_{\alpha}(\mathbb{R}^d_+) = \bigcap_{h>0} \mathbf{G}^{\alpha,h}_{\alpha,h}(\mathbb{R}^d_+).$$

We consider the inhomogeneous Schrödinger initial value problem

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) - E^r_{x,c}u(t,x) = F(t,x) \quad (t,x) \in [0,T]\times R^d_+ \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{10}$$

where $E^r_{x,c}$ are powers of Laguerre operators, $r \geqslant 0$ and $c \in \mathbb{C}$.

We say that the problem (10) is well-posed if the solution $u(t,x)$ depends continuously on the initial value u_0.

We show that for $r > 0$ and $c \in \mathbb{C}$ the following is true

(i) If $r \geqslant 1$, the equation (10) is ill-posed for Schwartz functions on $\mathbb{R}^d_+$, G-type functions and elements from their dual spaces.

(ii) The equation (10) is well-posed in the setting of suitable $P-$spaces on orthants and their dual spaces.

Keywords: Schrödinger problem; $P-$spaces; Laguerre operators; Ultradifferentiable functions.

References

[1] **S. Jakšić, S. Pilipović, B. Prangoski.** G-type spaces of ultradistributions over $\mathbb{R}^d_+$ and the Weyl pseudo-differential operators with radial symbols. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math.*, 2017, 111, 613–640.

[2] **S. Jakšić, S. Pilipović, N. Teofanov, Dj. Vučković.** Ultradifferentiable functions via the Laguerre operator. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math.*, 2025, 119, 89.

[3] **J. Toft, D. G. Bhimani, R. Manna.** Fractional Fourier transforms, harmonic oscillator propagators and Strichartz estimates on Pilipović and modulation spaces. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2023, 67.

A note on inhomogeneous (α, β)-harmonic equation

Jelena Gajić

Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Banja Luka, Mladena Stojanovića 2, Banja Luka, Republic of Srpska
e-mail: jelena.gajic@pmf.unibl.org
ORCID: 0000-0001-9732-1000

Abstract. We study some properties of the Green operator $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ for the elliptic operator $L_{\alpha,\beta}$ defined below, when acting on $L^p(\mathbb{D})$. We also study behavior of $\partial_z u$ i $\partial_{\bar{z}} u$ where u is the solution of inhomogeneous equation $L_{\alpha,\beta} u = g$. Here

$$L_{\alpha,\beta} = (1-|z|^2)^{-(\alpha+\beta+1)} \left((1-|z|^2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z} + \beta \overline{z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \alpha\beta \right)$$

where α and β are complex parameters satisfying $\Re\alpha + \Re\beta > -1$.

The obtained results provide a significant improvement over previous research on the subject).

Keywords: (α, β)-harmonic function; (α, β)-Poisson equation; Weighted Green function.

References

[1] **M. Arsenović, J. Gajić.** Schwarz-Pick Lemma for (α, β)-harmonic functions in the unit disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2024, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128489.

[2] **M. Arsenović, J. Gajić, M. Mateljević.** Schwarz-Pick Lemma for Harmonic and Generalized Harmonic Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, 5975–6010. https://doi.org/10.1134/S1995080224607409

[3] **M. Arsenović, J. Gajić, and M. Mateljević.** H^p theory of separately (α, β)-harmonic functions in the unit polydisc. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 2025, Volume 89, Issue 5, Pages 3–31, *Izv. Math.*, 2025, 89:5, 871–899. DOI: https://doi.org/10.4213/im9603 (Mi im9603)

[4] **A. Khalfallah, M. Mhamdi.** Schwarz Type Lemmas for Generalized Harmonic Functions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2024, 47:53. https://doi.org/10.1007/s40840-023-01646-4

On kernel-based dependence measures for variable selection

Bojana Milošević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-8243-9794

Jelena Radojević

University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering & Faculty of Mathematics
e-mail: jradojevic@grf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0001-7275-6654

Abstract. We investigate a generalized kernel-based distance correlation framework for feature screening in high-dimensional data. Under mild and interpretable conditions, and for a broad class of negative-definite kernels, we establish theoretical guarantees for the sure screening property. The flexibility of the proposed approach is demonstrated through an extensive empirical study covering multiple data types. Simulation results illustrate its robustness and efficiency, while applications to real biomedical datasets confirm its practical relevance. These results highlight kernel-based distance measures as a powerful tool for variable selection in complex data.

Keywords: distance correlation; circular data; hyperspherical data; sure screening; model-free selection.

Novel U-empirical moment-generating-function–based tests for exponentiality

Alma Hamza

University of Belgrade, Faculty of Pharmacy & Faculty of Mathematics
e-mail: alma.hamza@pharmacy.bg.ac.rs

Bojana Milošević

University of Belgrade, Faculty of Mathematics
e-mail: bojana@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-8243-9794

Abstract. We present two novel scale-free classes of goodness-of-fit tests for exponentiality based on U-empirical moment-generating functions. The tests are constructed using the Puri–Rubin characterization of the exponential distribution; however, the approach can be applied to any equidistribution characterization. The limiting distributions of the proposed statistics are derived. In an extensive simulation study, the tests are compared with several recent powerful competitors. The good performance of the new tests provides strong motivation for studying broader classes of equidistribution-type characterization-based tests using the considered integral transformation.

Around the Boundary Point Principle

Darya Apushkinskaya

RUDN University
e-mail: apushkinskaya@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7743-1998

Alexander Nazarov

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg State University
e-mail: al.il.nazarov@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9174-7000

Abstract. One of the main tool in the qualitative analysis of solutions of elliptic and parabolic equations is the boundary point principle (also known as the Hopf–Oleinik lemma or the normal derivative lemma). It plays a key role in the proof of uniqueness theorems for boundary-value problems and also has some other applications. This principle states that a supersolution of a partial differential equation with a minimum value at a boundary point must increase linearly away from its boundary minimum provided the boundary is smooth enough. In the talk we describe the history and discuss the current state of this powerful statement. The talk is based on the results of the papers [1–4].

Keywords: normal derivative lemma; Hopf–Oleinik lemma; boundary point principle.

References

[1] **D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov.** The normal derivative lemma and surrounding issues. *Russian Math. Surveys*, **77**:2 (2022), 189–249.

[2] **D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov.** On the boundary point principle for divergence-type equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, **30**:4 (2019), 677–699.

[3] |D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov. A counterexample to the Hopf–Oleinik lemma (elliptic case). *Anal. PDE*, **9**:1 (2016), 439–458.

[4] **A.I. Nazarov.** A centennial of the Zaremba–Hopf–Oleinik lemma. *SIAM J. Math. Anal.*, **44**:1 (2012), 437–453.

СЕКЦИЈА

Математика и информатика у образовању

Ефективна употреба пројектних задатака у настави информатике: израда по фазама, оцењивање и формативно оцењивање

Душа Вуковић

Рачунарска гимназија
Кнез Михаилова 6/6, 11000 Београд
e-mail: dvukovic@rg.edu.rs

Апстракт. Пројектни радови у настави информатике подстичу ученике да кроз практичан рад истовремено стичу знања и унапређују кључне информатичке вештине. Овај рад разматра како да се пројектни задаци поставе тако да обухватају више нивоа сложености, омогућавајући ученицима да савладају вештине развоја пројекта по фазама, од једноставнијих елемената до коначног сложеног пројекта. Биће изнето неколико идеја како да се врши оцењивање, тако да се испита индивидуални допринос у тиму, а ради потврде да су сви ученици савладали предвиђено градиво. Такође, биће објашњено како пројектни рад може послужити као средство за формативно оцењивање, кроз анализу предатих више верзија рада са повратним информација за ученике. Посебан акценат биће стављен на то како теме пројеката могу бити дизајниране тако да ученици покажу своју креативност, а не да се од њих очекује да само реше постављени захтев. Пројектни радови су веома ефикасан механизам да се савлада неколико различитих тема у оквиру истог предмета, чиме се штеди време а повећава укупни резултат наставе и учења. Кроз конкретне примере из области база података и објектно оријентисаног програмирања приказани су детаљно разрађени пројектни радови који илуструју ове приступе.

Кључне речи: Пројектни радови; Оцењивање и тимски рад; Формативно оцењивање; Креативност

Библиографија

[1] **Duša Vuković** Baze podataka za treći razred specijalizovanih IT odeljenja, Petlja, 2023. *https://petlja.org/sr-Latn-RS/kurs/7963*

[2] **Duša Vuković** Programiranje - klase i objekti, CET, 2018. *https://cet.rs/proizvod/programiranje-klase-i-objekti/*

Мерење и сличност као полазни концепти еуклидске геометрије

Небојша Икодиновић

Математички факултет, Универзитет у Београду
e-mail: nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-3832-760X

Апстракт. Полазна тачка предавања биће донекле парадоксалан обрт: Талесова револуционарна метода мерења висине египатских пирамида, с којом се рађа права геометрија, своје оправдање добија тек у шестој књизи Еуклидових Елемената, којом се завршава заснивање планиметрије. Исти је случај са многим савременим аксиоматским системима, који су настали касније, логичким сређивањем Елемената: изворни концепти геометрије – мерење и сличност – долазе на крају. Управо по узору на овакве системе, у самој настави геометрије ова два концепта бивају у великој мери маргинализована. Мерење се искључује из геометријских аргументација и изоставља се свака прича о његовом заснивању (док у настави геометрије потпуно доминирају рачунски задаци), а сличност се третира као напредна тема сведена у веома ограничене оквире типизираних школских задатака.

Несклад између природног развоја математичких идеја и каснијег логичког сређивања тих идеја представља један од највећих изазова у заснивању наставе математике. Савремена дидактика математике јасно истиче да кључне математичке концепте треба пажљиво планирати и развијати током читавог школовања. Главни циљ предавања јесте да се применом наведеног принципа развије концепт сличности, кроз све нивое математичког образовања, повезивањем новијих сазнања когнитивне науке, природног развоја математичких идеја и самих циљева образовања у савременом друштву. Укратко ће бити приказан и аксиоматски систем Бирхофа, превасходно развијен за потребе у настави. Излагање ће пратити свежи и разноврсни задаци прилагођени различитим нивоима и циљевима учења математике.

Кључне речи: мерење; сличност; аксиоматски систем.

Библиографија

[1] **G. F. Birkhoff.** A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors). *Annals of Mathematics*, 1932, 33(2), 329–345.
[2] **G. F. Birkhoff, R. Beatley.** *Basic geometry.* Chelsea Publishing Company, New York, 2000.
[3] **Z. Luchić.** *Euklidska i hiprebolichka geometrija.* Matematichki fakultet, Beograd, 1997.
[4] **Ј. Пељерман.** *Занимљива геометрија.* Народна књига, Београд, 1958.

Ставови наставника о примени вештачке интелигенције у настави математике

Радослав Божић

Учитељски факултет, Универзитет Едуконс, Сремска Каменица
e-mail: radoslav.bozic@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1128-8823

Апстракт. Током последњих неколико година, развијен је већи број апликација, заснованих на вештачкој интелигенцији (ВИ апликације), које су намењене решавању математичких проблема. Овакве апликације су лако доступне ученицима. Њихово коришћење има предности, али представља и изазов. Током 2025. године, спроведено је истраживање, које је имало за циљ да се испитају ставови наставника математике у основним и средњим школама у Србији о примени вештачке интелигенције у настави. Већина испитаника није користила ВИ апликације у настави, али показују интересовање да се упознају са овим апликацијама и да испробају њихову примену у настави. Наставници који су користили ВИ апликације уочили су предности, али и недостатке њихове примене.

Кључне речи: вештачка интелигенција; математика; настава; ставови.

Библиографија

[1] **C. Chan, L. Tsi.** Will generative AI replace teachers in higher education? A study of teacher and student perceptions. *Studies in Educational Evaluation*, 2024, https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2024.101395.

[2] **S. Hwang.** Examining the Effects of Artificial Intelligence on Elementary Students' Mathematics Achievement: A Meta-Analysis. *Sustainability*, 2022, 14, 13185.

[3] **O.A,G. Opesemowo, M. Ndlovu.** Artificial intelligence in mathematics education: The good, the bad, and the ugly. *Journal of Pedagogical Research*, 2024, 8(3), 333-346.

Развијање дивергентног мишљења у настави математике

Анђелка Симић Миливојевић

Гимназија Бранислав Петронијевић Уб
Факултет педагошких наука, Универзитет у Крагујевцу (докторанд)
e-mail: andjelka.simic@dms.rs

Апстракт. Иако је у настави математике најчешћи циљ проналажење једног тачног решења, управо задаци који омогућавају више приступа и решења највише подстичу развој дивергентног мишљења – способности генерисања великог броја различитих, оригиналних и разноликих идеја или решења за задати проблем, за разлику од конвергентног мишљења које тежи проналажењу једног тачног одговора. У излагању ће бити приказано како се дивергентне способности ученика (флуентност, флексибилност и оригиналност) могу развијати кроз нестандардне математичке задатке, као што су задаци са више решења (MST), отворени задаци, постављање проблема ($problem - posing$) и активности типа увек–понекад–никад (ASN). Развијање ових способности доприноси дубљем разумевању математичких појмова, као и развоју компетенција за решавање проблема, критичког мишљења и креативности. Улога наставника је у вођењу процеса решавања, поређењу ученичких идеја и подстицању дискусије која охрабрује флексибилност и аргументовање. Циљ излагања је да покаже како пажљиво одабрани задаци и отворена комуникација у учионици могу постати подстицај за развој креативног и флексибилног математичког мишљења, као предуслова за разумевање и примену математике у свакодневном животу.

Кључне речи: дивергентно мишљење; флексибилност; креативност; нестандардни задаци; настава математике.

Библиографија

[1] **J. P. Guilford.** The nature of human intelligence. McGraw-Hill, New York, 1967.
[2] **E. A. Silver.** Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – Mathematics Education*, 1997, 29(3), 75–80.
[3] **R. Leikin.** Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In: *Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices*. Springer, 2014, pp. 59–80. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_5
[4] **R. A. Beghetto, J. C. Kaufman.** Classroom contexts for creativity. *High Ability Studies*, 2014, 25(1), 53–69. https://doi.org/10.1080/13598139.2014.905247

Нови стандарди у настави математике

Божидар Милановић
Гимназија Младеновац
e-mail: milanovic.boza@gmail.com

Милан Грујин
Школска управа Нови Сад
e-mail: milan.grujin@gmail.com

Апстракт. У децембру 2024. године изашли су нови стандарди из математике за крај првог циклуса основног образовања, другог циклуса основног образовања и за крај средњег образовања. Нови стандарди у први план стављају сврху учења и функционалност знања коју ученици током свог образовања стичу и активно примењују у многобројним ситуацијама школског и свакодневног живота. Стандарде постигнућа чине три основне компоненте: општа предметна компетенција на три нивоа, специфична предметна компетенција на три нивоа и исходи образовног циклуса на три нивоа. Општа предметна компетенција описује главну сврху учења математике. Са њом се успоставља веза између математике и реалног живота. Специфична предметна компетенција 1 одговара на питање „шта", специфична предметна компетенција 2 на питање „како" и специфична предметна компетенција 3 на питање „зашто". У раду ћемо покушати да додатно објаснимо сваку од специфичних предметних компетенција за математику. Успоставићемо везу између специфичних предметних компетенција и дводимензионалне Блумове таксономије. Навешћемо предлоге како би поједини исходи могли да буду достигнути на часовима. Указаћемо на погодност нових исхода и стандарда у примени током диференциране наставе. Посебан осврт ћемо направити на ИОП 3. Извршићемо и поређење са старим стандардима и исходима, као и са стандардима земаља у окружењу. Навешћемо нека наша размишљања о изменама у наставним плановима и програмима у основној и средњој школи. Предложићемо неке начине како би те измене могле да се примене у пракси.

Кључне речи: стандард; исход; компетенција; диференцијација.

Библиографија

[1] **Завод за унапређивање образовања и васпитања.** Правилник о стандардима образовних постигнућа за крај првог циклуса основног образовања и за крај основног образовања. *Службени документ*, 2024.

[2] **Завод за унапређивање образовања и васпитања.** Правилник о стандардима образовних постигнућа за крај средњег образовања и васпитања. *Службени документ*, 2024.

Упоредна анализа два *GenAI* модела у решавању задатака из области математичког моделирања

Александар Миленковић

Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
e-mail: aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-6699-8772

Немања Вучићевић

Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
e-mail: nemanja.vucicevic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-4903-7280

Марина Свичевић

Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
e-mail: marina.svicevic@pmf.kg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-2791-3849

Апстракт. У новије време све је већи број истраживања усмерен на анализу ефикасности модела генеративне вештачке интелигенције (*GenAI*) у решавању математичких проблема. У том контексту, посебна пажња посвећује се испитивању могућности ових алата у домену математичког моделирања. Недавне студије указују да бесплатна верзија *ChatGPT*-а ($GPT-4o$) може да послужи студентима као помоћно средство у процесу валидације решења, иако њене перформансе још увек не достижу жељени ниво. Мотивисани тим налазима, циљ нашег истраживања био је да тестирамо два алата којима се у новијој литератури придаје све већи значај, а који према доступним подацима постижу обећавајуће резултате *Gemini Pro* и *ChatGPT Thinking* ($GPT-5$). У овом раду представићемо перформансе поменутих алата у решавању задатака из математичког моделирања, праћених кроз циклус моделирања према моделу који су предложили *Blum & Leiss*. Анализа ће обухватити квалитативну, упоредну евалуацију решења шест задатака које су студенти четврте године основних академских студија математике Природно-математичког факултета у Крагујевцу решавали у оквиру предиспитних обавеза на предмету Математичко моделирање.

Кључне речи: математичко моделирање; *GenAI*; *Gemini Pro*; $GPT-5$.

Библиографија

[1] **W. Blum, D. Leiss.** How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 2007, pp. 222 - 231.

[2] **M. Svičević, A. Milenković, N. Vučićević, M. Stanković.** Evaluating the Success of AI Tools in Supporting Student Performance in Mathematical Kangaroo Competition. *Computer Applications in Engineering Edu-cation 33(4)*, 2025.

[3] **N. Vučićević, A. Milenković, M. Svičević.** ChatGPT's Capability in Solving Mathematical Modelling Problems. *16th International Conference on eLearning, Belgrade, Serbia, 28-29 September 2025.*

Анализа логичких загонетки

Дејан Вурдеља

Електротехничка школа „Земун”, Наде Димић 4, Земун
e-mail: dvurdelja@sbb.rs
ORCID: -

Апстракт. У овом излагању бавићемо се анализом и решавањем две логичке загонетке које су током историје изазвале пажњу математичара и љубитеља логике. Први део представља Оксфордску логичку питалицу, у којој учесници имају делимичне информације о облику и боји фигуре испод које се крије награда. Кроз корак по корак елиминацију и логичко закључивање показује се како из почетне неизвесности долазимо до јединственог решења. Други део излагања биће посвећен Пинокијевој загонетки, задатку са математичке олимпијаде, у којем је потребно анализирати истинитост једне изјаве, под претпоставком да Пинокио увек говори неистину. Кроз пажљиво разматрање различитих интерпретација и логичких последица, показаћемо како се долази до тачног закључка.

Comparative analaysis in successful solving of mathematical logical problems

Edin Liđan

Third gymnasium Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
e-mail: lidan.edin@gmail.com
ORCID: 0009-0005-1621-9642

Tatjana Stanković

Belgrade Business and Arts Academy of Applied Studies, Serbia
e-mail: tatjana.stankovic@bpa.edu.rs
ORCID: 0009-0008-2846-4444

Abstract. We are witnessing daily advances in the development of artificial intelligence. While some sources are predicting that by 2060 year artificial intelligence will surpass human intelligence [2], others are are claiming that artificial intelligence will never be able to exceed human creativity but it will help in enhancing and expanding of human creativity [1]. So, the question arises whether reasoning is going to have same future as creativity or not. In this paper, we explore the reasoning abilities of tools based on generative artificial intelligence [3], [4], specifically ChatGPT, in solving mathematical problems. We also conduct a comparative analysis of the success rates of students and ChatGPT in solving these tasks.

Keywords: mathematical logical problems; generative artificial intelligence;ChatGPT; teaching of mathematics.

References

[1] **A. Agarwal.** Is AI the end of Human Creativity. *Journal of Advances in Science and Technology*, 2023, 20(2), 21-27.

[2] **M. L. Owoc, A. Sawicka, P. Weichbroth.** Artificial Intelligence Technologies in Education: Benefits, Challenges and Strategies of Implementation In: *Artificial Intelligence for Knowledge Management.* Conference proceedings, Springer, 2021, pp. 37–58.

[3] **T. Stanković, E. Liđan.** Reasoning of generative artificial intelligence in solving mathematical logical problems. *Journal of Educational Studies in Mathematics and Computer Science*, 2024, 1(2), 27–36.

[4] **T. Stanković, E. Liđan.** Reasoning of Artificial Intelligence in Solving Logical Tasks. *The Book of Abstracts. TEMATCOM – The First Conference on Mathematics and Computer Science Teaching*, University of Kragujevac, Serbia, 2024, 45.

The Global Integration of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Comparative Analysis of Pedagogical Paradigms and Implementation Strategies

Nataša Milosavljević

University of Belgrade – Faculty of Agriculture, Department of mathematics and Physics
e-mail: natasam@agrif.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-4056-089X

Dušan Stojičević

Peta beogadska gimnazija
e-mail: dusan.stojicevic@mail.ru

Vladimir Pavlović

University of Belgrade – Faculty of Agriculture, Department of mathematics and Physics
e-mail: vladimirboskopavlovic@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1138-0331

Branislav Vlahović

North Carolina Central University, Director of CREST and NASA Research Centers, Centers For Research Excellence in Science and Technology
e-mail: vlahovic@nccu.edu
ORCID: 0000-0001-8965-1480

Abstract. The contemporary educational landscape is undergoing a profound transformation driven by advancements in AI. Mathematics, as a discipline with structured logic and clear progressions, has become a primary domain for the application of AI-driven educational technologies. This paper provides a comparative analysis of how diverse regions and countries around the world are adopting and adapting AI tools for the teaching and learning of mathematics. By examining national strategies, key platforms, and focal points of implementation, distinct models emerge: state-driven systemic integration, teacher-empowerment approaches, and grassroots adoption. The analysis reveals that while the core technologies of adaptive learning and personalized tutoring are similar, their application is profoundly shaped by local educational policies, cultural values, and socioeconomic contexts. Commonalities are identified, particularly a global shift towards viewing AI as a tool for augmenting, rather than replacing, educators. However, significant challenges persist, including concerns about educational equity, the erosion of critical thinking, and the urgent need for comprehensive teacher professional development and ethical frameworks. Our analysis indicates that the success of any initiative is less contingent on the specific technology and more on its alignment with a supportive educational ecosystem. This ecosystem necessitates continuous teacher professional development, robust evidence-gathering, and ethical policies that prioritize enhancing human instruction over automation. Future research should pursue longitudinal studies on the long-term impact of AI on mathematical reasoning and investigate the role of generative AI in fostering Cognitive skills, mathematical creativity and collaborative problem-solving.

Keywords: Artificial intelligence;Digitally-supported education; Educational policies.

References

[1] **R. Luckin, M. Cukurova, C. Kent, B. du Boulay.** Empowering educators to be AI-ready. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 2022, **3**, 100076.

[2] **V. B. Pavlović, N. Milosavljević, V. P. Pavlović, B. Vlahović.** Artificial intelligence and digital technologies in digitally-supported university education. In: *Mathematics for Human Flourishing in the Time of COVID-19 and Post COVID-19*. De Gruyter, 2023, pp. 195–200.

[3] **UNESCO.** *AI and Education: Guidance for Policy-Makers.* UNESCO Publishing, 2023.

How artificial intelligence can help in different EU grants for scientific and education purposes

Nenad Filipović

Faculty of Engineering, University of Kragujevac
BIOIRC, Bioengineering Research and Development Center, 34000 Kragujevac, e-mail: fica@kg.ac.rs

Dragan Djurčić

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: dragan.djurcic@ftn.kg.ac.rs

Nada Damljanović

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: nada.damljanovic@ftn.kg.ac.rs

Danica Fatić

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: danica.fatic@ftn.kg.ac.rs

Vučelja Lekić

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: vucelja.lekic@ftn.kg.ac.rs

Marija Djukić

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: marija.djukic@ftn.kg.ac.rs

Katarina Pavlović

Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac, e-mail: katarina.pavlović@ftn.kg.ac.rs

Abstract. In silico clinical trials are set to transform medicine by enabling virtual testing and simulation, which streamline the development of medical devices and pharmaceuticals while reducing costs and duration. The SILICOFCM platform offers a innovative, multi-modular approach designed to optimize overall heart function and monitor the effectiveness of pharmacological treatments, aiming to decrease dependence on animal and human trials. The overarching goal of the STRATIFYHF project is to develop and clinically validate an innovative AI-driven Decision Support System (DSS) to predict heart failure risk, support early diagnosis, and forecast disease progression—offering a paradigm shift in heart failure management across primary and secondary care. The DSS integrates patient-centered data from existing and emerging technologies, a digital patient library, and AI-based algorithms combined with computational modeling. Through workflows dedicated to improving heart performance and evaluating pharmacological effects, SILICOFCM and STRATIFYHF are paving new pathways to accelerate drug development and clinical testing. SGABU project has increased scientific, technological and innovation capacity of Serbia as a Widening country in the domain of multiscale modelling and medical informatics in biomedical engineering. The training activities such as workshops, collaborative academic and industrial activities are completed. Collaborative academic activities included peer-reviewed scientific publication, joint conference publication and joint project proposals. The partners explored opportunities in the four main applications of the SGABU platform: Bone modelling, Cardiovascular disease modelling, Cancer modelling, Tissue engineering. Partners developed teaching material and knowledge framework as well as computational resources in parallel with models integration into the SGABU platform. Collection of data and multiscale models and solutions is completed in parallel with their integration into unified SGABU computational platform and creation of learning material. It involves: (i) the testing and validation methods for the multiscale models integrated into the SGABU platform and (ii) the evaluation and refinement of the final platform with all the integrated components through system testing, and usability assessment. All three projects SILICOFCM, STRATIFYHF, SGABU included AI modules for scientific research and education.

Keywords: insilico clinical trials, cancer, cardiovascular, bone, tissue engineering, AI.

Paradox – Artificial Intelligence and the Application of Mathematics

Vesna Babović

Prva niška gimnazija Stevan Sremac
e-mail: vesna.babovic@sremac.edu.rs

Abstract. The basis of every educational system is the mother tongue and mathematics. Paradox: AI exists and was created thanks to mathematics, but it does not know how to apply mathematics. This is not about solving problems, algebra, or geometry. The point is that mathematics serves to develop logical, critical, and creative thinking. If a gym is a place to train the body, then mathematics is an area to train the brain. Why is this "gym" denied to AI?

The question arises: why are all artificial intelligences developed based on a large language base (LLM)? If the development of probability was influenced by gamblers, and if statistics is often a science that can lie, depending on the starting parameters, what does that say about the development of artificial intelligence? Why are fast and desirable answers, given based on probability and occurrence statistics, considered more important than correct answers? Let us remember: a lie repeated 100 times becomes truth!

Why are milliards spent on training and developing AI, yet none of them has been assigned a mathematician to teach it the application of mathematics and the development of logical and critical thinking?

The fact is that the language of mathematics is universal worldwide. It means the same everywhere, only read differently. Why is the understanding and application of something that is common and the same for everyone, mathematics, denied in a large linguistic base?

I tested five artificial intelligences - ChatJPT, Gemini, DeepSeek, Grok, Claude - and all failed three simple tests! The solutions to the tasks are not important, what matters is that they all showed weakness when it comes to logical thinking and giving correct answers. Is the development of AI, based on a large linguistic base, probability, and statistics, good for AI and humanity? The answer from all five is: no!

This is a call and a warning that the development of educational systems and the application of mathematics does not mean memorizing data, but insisting on logical, critical thinking and understanding, especially regarding the use of AI. At the same time, this is an attempt by a mathematician to influence the correction of AI development while there is still time. The question is whether those who develop AI will listen to mathematicians, or are they too focused on speed and commercial applicability.

Complex problems often have simple solutions, and those are the most beautiful. Proposed solutions:

- Globally determine a minimal set of rules that every AI should follow;
- Educate people through education systems and media about the use of AI;
- Continue developing AI that will deal with facts, not just probable and statistically acceptable data.

Keywords: Artificial Intelligence; Applied Mathematics; Logical Thinking; Critical Thinking; Education.

References

[1] **B. Vesna.** Golden ratio. The closing conference of project Visuality & Mathematics, Belgrade, Serbia, 2014, pp. 215–216.

Primena AHP metode za evaluaciju i rangiranje inovacija u visokoškolskoj nastavi matematike i informatike

Mimica Milošević

Fakultet za matematiku i računarske nauke, Bulevar maršala Tolbuhina 8, Beograd, Srbija
e-mail: mimica.milosevic@alfa.edu.rs

Sonja Đukić Popović

Šesta beogradska gimnazija, Milana Rakića 33, Beograd, Srbija
e-mail: sonjica27@yahoo.com

Dušan Milošević

Elektronski fakultet, Aleksandra Medvedeva 4, Niš, Srbija
e-mail: dusan.milosevic@elfak.ni.ac.rs

Stefan Popović

Fakultet informacionih tehnologija, Bulevar maršala Tolbuhina 8, Beograd, Srbija
e-mail: stefan.popovic@alfa.edu.rs

Apstrakt. Inovacije u nastavi matematike i informatike su značajne u procesu modernizacije visokog obrazovanja i prilagođavanja potrebama digitalnog doba. Iako postoje razlike u sadržaju i metodologiji, obe discipline imaju za cilj podsticanje razvoja analitičkog razmišljanja, pristupa rešavanju problema i sposobnosti primene znanja u realnim situacijama. U obrazovnim trendovima upotreba digitalne tehnologije, tehnika aktivnog učenja i sistema procene koji podržavaju personalizovano i interaktivno učenje postaju sve značajnije. Studenti su motivisaniji i bolje razumeju složene koncepte kada se koriste inovativne tehnike poput gejmifikacije, onlajn i hibridnih modela, učenja zasnovanog na projektima, veštačke inteligencije i analitike učenja. Matematika koristi kreativnost za stvaranje praktičnih primena i vizuelizaciju apstraktnih koncepata, dok računarstvo koristi iste koncepte za unapređenje tehničkih i programerskih veština studenata. Da bi se odredili prioriteti u razvoju modela nastave, tehnologije i pedagoških pristupa, u ovoj studiji se koristi AHP tehnika za analizu i rangiranje glavnih indikatora inovacija u nastavi obe discipline. Prikupljeni rezultati omogućavaju temeljno razumevanje elemenata koji najviše utiču na efikasnost i kvalitet obrazovnog procesa u digitalnoj sferi.

Ključne reči: inovacije u nastavi, digitalne tehnologije, aktivno učenje, AHP metoda

Bibliografija

[1] **Dušan M. Milošević, Mimica R. Milošević, Dušan R. Simjanović** *Implementation of Adjusted Fuzzy AHP Method in the Assessment for Reuse of Industrial Buildings*, Mathematics (2020): 1697.

[2] **S. Djukić Popović, S. Popović.** *The influence of the application of teaching aids in mathematics teaching on learning outcomes*, The Book of Abstracts XIII SYMPOSIUM "MATHEMATICS AND APPLICATIONS", (2023): 33 – 33.

Demokratski pristup u nastavi matematike

Aleksandra Danilović
OŠ „Svetislav Golubović Mitraljeta"
e-mail: aleksdan@email.com

Apstrakt. Izraz „demokratski pristup nastavi matematike" obično upućuje na pristup podučavanju matematike koji se zasniva na demokratskim principima - uvažavanju učenika, zajedničkom donošenju odluka, otvorenoj komunikaciji i aktivnom učešću svih u procesu učenja. Nastava matematike zasniva se na principima saradnje, učešća učenika, kritičkog mišljenja, inkluzije i dijaloga. U takvom okruženju učenici zajedno istražuju matematičke ideje, razmenjuju strategije i zajednički dolaze do rešenja, što razvija kooperativne veštine i osećaj zajedničke odgovornosti. U praksi bi to značilo: da učenici mogu učestvovati u izboru zadataka, metoda rada ili projekata. Aktivnim učešćem u izboru metoda rada i načina prezentacije rešenja, učenici postaju ko-kreatori procesa učenja i razvijaju dublje razumevanje matematičkih koncepata. Podsticanje kritičkog mišljenja omogućava im da promišljaju o postupcima, analizirajuargumente i povezuju matematiku sa realnim situacijama. Pravila rada u učionici zajedno kreiraju učenici i nastavnici. Podstiče se diskusija, postavljanje pitanja, rešavanje problema u malim grupama, uvažava se različit način razmišljanja i argumentovanja. Naglasak nije samo na tačnom odgovoru, već i na procesu. Učenici mogu predlagati i braniti različite strategije rešavanja. Učenje se odvija u saradničkom okruženju tako što se organizuju matematičke rasprave, zajedničko modelovanje problema, razvija se sposobnost pregovaranja, objašnjavanja i slušanja tuđih ideja. Demokratizacija nastave ogleda se i u jačanju inkluzije, jer svaki učenik dobija priliku da doprinese i bude prepoznat bez obzira na nivo predznanja. Nastavnik vodi računa o prilagođavanju zadataka različitim nivoima znanja. Njegov zadatak je i podsticanje svih učenika da učestvuju, bez straha od greške. Vodi računa o poštovanju različitih kulturnih i socijalnih pozadina. Nastavnik u ovom procesu nije „autoritet koji zna sve" već vodič koji: postavlja problemske situacije, podstiče kritičko mišljenje i ohrabruje saradnju.

Zašto je važan demokratski pristup u nastavi matematike?

Demokratski pristup u nastavi matematike važan je zato što:

- razvija logičko i kritičko mišljenje,
- jača samopouzdanje učenika,
- podstiče radoznalost,
- omogućava da učenici preuzmu odgovornost za sopstveno učenje,
- priprema ih za aktivno učešće u društvu.

Kroz stalni dijalog - između učenika i nastavnika, ali i među samim učenicima - grade se poverenje, otvorenost i kultura učenja koja podržava različite perspektive i puteve do rešenja. Prikaz aktivnosti u nastavi matematike za razvijanje kompetencije „Autonomne veštine učenja" na osnovnom i naprednom nivou: Istražujemo zajedno. Matematičko problem za učenike 6. razreda osnovne škole je: „Minimalna plata - može li se od nje živeti?"

Ključne reči: saradnja; aktivno učešće; kritičko mišljenje; uvažavanje različitosti; dijalog.

Bibliografija

[1] **E. Gutstein, B. Peterson.** Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers. *Rethinking School*, 2013.

[2] **O. Scovsmose.** Critical Mathematics Education. *Advances in Mathematics Education.* Springer Nature, 2023.

[3] **ZUOV, Tatjana Mišović, Matematika.** Demokratske kompetencije kroz međupredmetni pristup. *Smernice za integraciju Referentnog okvira kompetencija za demokratsku kulturu u odabranim programima nastave i učenja*, Savet Evrope, 2025.

Primena proporcije u osnovnoškolskoj nastavi matematike

Jasmina Alilović
OŠ „Matija Gubec", Čeminac, Republika Hrvatska
e-mail: jasminaalilovic6@gmail.com

Danica Utješinović
OŠ „Dušan Vukasović Diogen", Bečmen, Republika Srbija
e-mail: danautj@gmail.com

Apstrakt. Rad se bavi značajem pojma proporcije u nastavi matematike u osnovnoj školi, njenim mestom u nastavnom programu i didaktičkim pristupima koji podstiču dublje razumevanje ovog matematičkog pojma. Proporcija, kao jednakost dva odnosa, ima važnu ulogu u razvoju logičkog mišljenja, sposobnosti zaključivanja i primene matematike u svakodnevnom životu. U radu se ističe potreba za postepenim uvođenjem pojma kroz realne primere, vizuelizaciju i iskustveno učenje, pre nego što se pređe na formalni matematički zapis. Poseban akcenat stavljen je na različite metodičke oblike rada – rad u grupama, istraživačke zadatke, upotrebu digitalnih alata i projektne aktivnosti – koji omogućavaju učenicima da povežu teoriju sa praksom. Zaključuje se da poučavanje proporcije ne treba da se svede samo na mehaničko rešavanje zadataka, već da doprinese razvoju sposobnosti modelovanja, analitičkog mišljenja i primene matematičkih odnosa u realnim situacijama.

Ključne reči: proporcija; nastava metematike; razmera; logičko mišljenje; praktična primena.

Takmičarski model rotacije uloga za razvoj algoritamskog razmišljanja "Četiri glave, jedan kod"

Jelena Kenić
OŠ "Dr Dragiša Mišović", Čačak
e-mail: jecakenic@gmail.com

Mirjana Glišić
OŠ "Dr Dragiša Mišović", Čačak
e-mail: glisic.mirjana2@gmail.com

Apstrakt. Ovo izlaganje predstavlja didaktičku studiju slučaja takmičenja **"Četiri glave, jedan kod“**, realizovanog povodom Code Week manifestacije.[1] Takmičenje je imalo za cilj unapređenje **algoritamskog razmišljanja**, preciznosti u praćenju uputstava i timskog rada kod učenika 3. i 5. razreda, u skladu sa ciljevima Nastavnog plana i programa.[2] Radionica, vođena od strane nastavnice matematike i učiteljice, organizovana je kroz **Model Rotacije Uloga** u mešovitim timovima, primenjujući principe usvojene na stručnom usavršavanju.[3] Timovi su formirani nasumičnim izvlačenjem kartica radi postizanja objektivne i funkcionalne saradnje.

Ključ modela je rotacija četiri funkcionalne uloge, čime se simuliraju sve faze razvoja programa: Posmatrač (strateško planiranje), Prenosilac (verbalizacija algoritma/kodiranje), Robot (precizna egzekucija) i Analitičar (pronalaženje i ispravljanje grešaka).

Takmičenje je obuhvatilo četiri igre progresivne kompleksnosti: od vizuelne komunikacije ("Kodiraj sliku“), preko složenog sekvenciranja ("Kodiraj most“), do grupnog rešavanja problema na mapi gde se ocenjivala **brzina i tačnost** rešenja ("Kodiraj zeca“). Najkompleksniji zadatak, "Kodiraj sendvič“, zahtevao je od tima da napiše algoritam/program za izradu sendviča.

Evaluacija je vršena od strane žirija sastavljenog od roditelja, koji su tačnost izvođenja ocenjivali definisanom skalom (5/3/1). Rezultati pokazuju izuzetno visok nivo **motivacije** i efikasnost modela u razvoju aktivne saradnje i logičkih kompetencija u kompetitivnom okruženju. Predstavljanje ovog modela je u skladu sa ciljevima Simpozijuma za unapređenje nastave.

Ključne reči: Algoritamsko razmišljanje; Rotacija uloga; Takmičarski model; Unplugged; Matematika i informatika u obrazovanju.

Bibliografija

[1] **EU Code Week.** Službena veb stranica. *Pristupljeno sa: https://codeweek.eu/.*
[2] **Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja.** Pravilnik o programu nastave i učenja za 3. i 5. razred osnovne škole. *Službeni glasnik RS, n.d..*
[3] **eTwinning.** eTwinning workshop "Ambassadors in action: building communities with skills for life", Poland, 9-11 October 2025. *Programski materijal.*
[4] **Matematički fakultet i DMS.** Zbornici radova i knjige apstrakata sa prethodnih simpozijuma "Matematika i primene". *Izdanje organizatora Simpozijuma.*

Primena diferencijalnog računa u analizi funkcija ponude i tražnje u eri veštačke inteligencije

Slavica Dabetić

Beogradska akademija poslovnih i umetničkih strukovnih studija
e-mail: slavica.dabetic@bpa.edu.rs
ORCID: 0009-0001-2248-2341

Tatjana Stanković

Beogradska akademija poslovnih i umetničkih strukovnih studija
e-mail: tatjana.stankovic@bpa.edu.rs
ORCID: 0009-0008-2846-4444

Apstrakt. Razvoj veštačke inteligencije značajno menja način na koji se vrši analiza tržišta i donose ekonomske odluke [1, 2]. Jedan od ključnih matematičkih alata u toj analizi jeste diferencijalni račun koji omogućava proučavanje stope promene ekonomskih veličina kao što su ponuda i tražnja. Primena izvoda omogućava kvantifikaciju odnosa između cene i količine što predstavlja osnovu za analizu elastičnosti tržišnih funkcija [3]. Metoda procene elastičnosti funkcija ponude i tražnje zavisi od oblika u kom su te funkcije zadate [4, 5].

U eri veštačke inteligencije i naučno-tehnološkog razvoja, pojavljuju se mnogobrojni alati poput Geogebre, Desmos-a, ChatGPT-a, Gemini-ja itd. koji pružaju mogućnost dinamičke vizuelizacije funkcija, jednostavnog određivanja izvoda funkcije kao i kreiranje simulacija promena parametara u realnom vremenu [6]. Ovakav digitalni pristup povezuje ekonomiju, matematiku i informacione tehnologije, doprinoseći razvoju međupredmetnih kompetencija kao što su kritičko mišljenje, digitalna pismenost i analitičko rasuđivanje.

Iskustva iz nastavne prakse u visokom obrazovanju pokazuju da studenti ekonomskih usmerenja često imaju ograničeno razumevanje primene diferencijalnog računa u ekonomskim kontekstima [5]. Stoga je neophodno jačati povezanost matematičkih koncepata sa realnim ekonomskim primerima i tržišnim modelima, čime se podstiče funkcionalno razumevanje i razvija analitički pristup rešavanju ekonomskih problema.

Ključne reči: diferencijalni račun; ponuda i tražnja; elastičnost; veštačka inteligencija; nastava matematike.

Bibliografija

[1] **E. Brynjolfsson, A. McAfee.** Machine, platform, crowd: Harnessing our digital future. *W. W. Norton & Company*, 2017.

[2] **S. Makridakis.** The forthcoming artificial intelligence (AI) revolution: Its impact on society and firms. *Futures, vol.90.*, 2017, pp 46–60. https://doi.org/10.1016/j.futures.2017.03.006

[3] **A.C. Chiang, K. Wainwright.** Fundamental methods of mathematical economics (4th ed.). *McGraw-Hill*, 2005.

[4] **H.R. Varian.** Intermediate microeconomics: A modern approach (9th ed.). *W. W. Norton & Company*, 2014.

[5] **V. Vrcelj-Kaćanski, S. Dabetić.** Matematika – zbirka zadataka iz matematike. *Akademija poslovnih strukovnih studija*, Beograd, 2019.

[6] **OECD-Education International.** Opportunities, Guidelines and Guardrails on Effective and Equitable Use of AI in Education. *OECD Publishing*, Paris, 2023.

.

Prirodna dedukcija, preko interaktivnog dokazivanja do LaTeX dokaza

Andrija Urošević

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: andrija.urosevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0004-7679-1344

Sana Stojanović Đurđević

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5386-9100

Apstrakt. Proces pisanja dokaza u prirodnoj dedukciji je uglavnom pravolinijski, sa izuzecima primene pravila koja dovode do grananja u dokazima. Na papiru se gradi stablo dokaza, a za potrebe pisanja matematičkih udžbenika potrebno je pažljivo prepisati dati dokaz u LaTeX format. Kako se dužina dokaza može uvećavati poprilično brzo, kako matematičar napreduje i savladava dokaze težih teorema, javlja se rizik od pravljenja grešaka prilikom kucanja poprilično komplikovanog LaTeX koda koji se koristi za generisanje stabla dokaza.

Sa idejom olakšavanja ovog procesa i povećanja sigurnosti u generisanje LaTeX dokaza u prirodnoj dedukciji, kreiran je dokazivač *Theodor* koji će biti prikazan u ovom radu. Interaktivni dokazivač teorema *Theodore*, koristi isključivo pravila prirodne dedukcije, i može dokazivati teoreme logike prvog reda. Napisan je u jeziku Haskell i izvršava se u interaktivnom okruženju GHCi.

U toku rada dokazivača, tekući cilj dokaza se transformiše dok ne dođemo do praznog cilja. Na kraju rada dokazivača automatski se kreira LaTeX drvo dokaza u prirodnoj dedukciji na osnovu interaktivno kreiranog dokaza u stilu uobičajenom za matematičke udžbenike.

Ključne reči: interaktivno dokazivanje teorema; prirodna dedukcija; LaTeX

Olympiad USA

Mirjana Katić

e-mail: direktor@mg.edu.rs
Matematička gimnazija
Kraljice Natalije 37, Beograd

Bojana Matić

e-mail: bojanamate@gmail.com
Matematička gimnazija
Kraljice Natalije 37, Beograd

Apstrakt. Olympiad USA je međunarodno matematičko takmičenje koje okuplja učenike osnovnih i srednjih škola iz različitih zemalja sveta i organizuje se svake godine. Učesnici rešavaju zahtevne zadatke koji proveravaju duboko razumevanje matematičkih koncepata, logičko razmišljanje i kreativnost u pristupu problemima. Cilj takmičenja je podsticanje ljubavi prema matematici i razmena znanja među mladim talentima na globalnom nivou.

Ključne reči: Takmičenje, matematika, zadaci.

Bibliografija

[1] **https://olympiadusa.org/**

Primene nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine u geometriji

Miodrag Mateljević

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: miodrag@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-9226-0023

Marek Svetlik

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: marek.svetlik@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0005-0213-2167

Apstrakt. U ovom izlaganju razmatramo primenu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (A-G nejednakosti) na rešavanje nekih izoperimetrijskih problema u ravni. Pokazujemo da

- u klasi svih trouglova datog obima najveću površinu ima pravilan trougao;
- u klasi svih četvorouglova datog obima najveću površinu ima kvadrat;
- u klasi svih mnogouglova čiji je broj stranica jednak datom prirodnom broju n i obim jednak datom pozitivnom realnom broju l najveću površinu ima pravilni mnogougao.

Posebno, izvodimo Bretšnajderovu formulu za površinu četvorougla, a zatim korišćenjem iste pokazujemo da u klasi svih četvorouglova čije su stranice jednake datim dužima, najveću površinu ima tetivni četvorougao.

Ključne reči: A-G nejednakost; izoperimetrijski problem; Bretšnajderova formula.

Primeri primene vektorskog računa u dinamici rotacije

Tamara Mišković

Gimnazija „Veljko Petrović", Sombor
e-mail: somborskiimpuls@yahoo.com

Dušan Mišković

Gimnazija „Veljko Petrović", Sombor
e-mail: somborskiimpuls@yahoo.com

Apstrakt. Vektorski račun predstavlja fundamentalni matematički alat u klasičnoj mehanici, omogućavajući precizan opis kretanja i sila u trodimenzionalnom prostoru. Ovaj rad analizira primenu vektorskih operacija u rešavanju problema dinamike, sa fokusom na Drugi Njutanov zakon $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ kao osnovnu vektorsku diferencijalnu jednačinu. Takođe, analizira se uloga vektorskog proizvoda u definisanju momenta sile $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ i momenta impulsa $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ koji su ključni za razumevanje rotacione dinamike čvrstog tela. Cilj rada je da, kroz konkretne primere, demonstrira kako apstraktni matematički aparati vektorskog računa direktno korespondiraju sa merljivim fizičkim veličinama i olakšavaju rešavanje kompleksnih problema dinamike.

Ključne reči: vektorski račun; dinamika; sila; moment sile; moment impulsa.

Bibliografija

[1] **N. Čaluković.** Fizika za prvi razred gimnazije. *KRUG*, Beograd, 2004, 165-175.
[2] **J.D.Kečkić** MATEMATIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA za III razred srednje škole. In: *Zavod za udžbenike*. Beograd, 2014, pp. 100-109.
[3] **G. Pataki, S. Schmieta.** The DIMACS library of semidefinite-quadratic-linear programs. *Technical Report*, Computational Optimization Research Center, Columbia University, 2002.

Unapređivanje razumevanja dokaza teorema uz pomoć interaktivnih dokazivača

Sana Stojanović Đurđević

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-5386-9100

Andrija Urošević

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: andrija.urosevic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0004-7679-1344

Filip Marić

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: filip.maric@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-7219-6960

Apstrakt. Osnovni koncepti matematike i njihova svojstva se standardno opisuju teoremama. Razumevanje dokaza teorema, kao i kreiranje dokaza teorema je često neophodno za uspešno usvajanje znanja i praćenje gradiva. U poslednjih par decenija se sve češće koriste interaktivni dokazivači teorema, programi namenjeni detaljnom zapisivanju i dokazivanju teorema koji garantuju, odnosno proveravaju, korektnost napisanih dokaza. Preciznost koja je neophodna za rad sa interaktivnim dokazivačima i povratne informacije koje se dobijaju, mogu imati veliki benefit za razumevanje matematičkih koncepata i primene osnovnih logičkih pravila. Pažljiv odabir matematičkih i informatičkih oblasti može biti korišćen da studenti savladaju osnove formalnog dokazivanja teorema, bez prethodnog predznanja iz kurseva matematičke logike.

Ovaj pristup je korišćen u okviru kursa "Uvod u interaktivno dokazivanje teorema", na četvrtoj godini Matematičkog fakulteta uz interaktivni dokazivač teorema Isabelle. Pozitivni rezultati kursa su vidljivi kroz veliki skup seminarskih radova, među kojima su formalizovani zadaci sa rešenjima sa matematičkih olimpijada, kao i verifikovani određeni algoritmi i strukture podataka.

Ključne reči: razumevanje dokaza, formalni dokazi, interaktivno dokazivanje teorema;

СЕКЦИЈА

Научноистраживачки и стручни рад студената

Примена диференцијалне геометрије у информационим наукама

Наташа Ђурђевић

Универзитет у Београду - Пољопривредни факултет
e-mail: djurdjevic.natasa.naca@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0885-4735

Апстракт. Диференцијална геометрија има широк спектар практичних примена како у природним, тако и у друштвеним наукама. Диференцијална геометрија анализира геометрију објеката користећи тензорска поља на диференцијабилној многострукости. Ово оруђе се аналогно може применити на статистичким многострукостима. Рао је 1945. увео Риманову метрику на статистичку многострукост коришћењем Фишерове информационе матрице и рачунао геометријска растојања између две дистрибуције за различите статистичке моделе, док је Амари увео једнопараметарску фамилију афиних конексија. тзв. α-конексије. Наиме, како подацима може бити придружена фамилија расподела вероватноће, у оквиру диференцијалне геометрије се развија информациона геометрија, као њена грана која истражује информационе науке. Она заправо проучава геометрију одлучивања. За информациону геометрију најбитнији аспекти диференцијалне геометрије су они који нам омогућавају да узмемо проблем из различитих области, као што су статистика, информациона теорија, теорија контроле... визуелизујемо их геометријски и развијемо нови алат којим можемо проширити и развити ове области. Из тог разлога се непрекидно врше даља истраживања у области диференцијалне геометрије како би се ова теорија унапредила и била што прецизнија. У машинском учењу различити високодимензиони простори, као што су простори података или параметарски простори, могу бити третирани као многострукости, па се у зависности од проблема који треба решити и врсте генеративног модела уводе и испитују различите метрике, док у концепту кривине лежи основа за истраживање добре генерализације модела. Заправо, доказано је да мање скаларне кривине на слици loss функције узрокују већу робустност. Зато, ако желимо да управљамо латентним простором, а да истовремено сачувамо геометријску структуру датих података, не треба претпостављати да је овај простор еуклидски, уместо тога треба користити алат диференцијалне геометрије.

Кључне речи: диференцијална геометрија; метрички тензор; афина конексија; статистичка многострукост; информациона многострукост.

Библиографија

[1] **S. Amari, H. Nagaoka.** Methods of Information Geometry. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.
[2] **F. Nielsen.** An Elementary Introduction to Information Geometry. *Entropy*, 2020, 22, pp. 1100.
[3] **A. Pouplin, D. Eklund, C. H. Ek, S. Hauberg.** Identifying latent distances with Finslerian geometry. *Transactions on Machine Learning Research*, 2023.
[4] **A. Pouplin, H. Roy, S. P. Singh, G. Arvanitidis.** An Elementary Introduction to Information Geometry. *arXiv*, 2023.
[5] **G. Arvanitidis, M. González-Duque, A. Pouplin, D. Kalatzis, S. Hauberg.** Pulling back information geometry. In: *G. Camps-Valls and F. J. R. Ruiz and I. Valera (eds.), Proceedings of The 25th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. PMLR, 2022, pp. 4872–4894.

Учење програмских језика уз помоћ ChatGPT

Милош Павловић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски Трг 16, Београд
e-mail: milosshark2504@gmail.com

др Сана Стојановић Ђурђевић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски Трг 16, Београд
e-mail: sana.stojanovic.djurdjevic@matf.bg.ac.rs

Апстракт. Развој вјештачке интелигенције у посљедњим годинама снажно је утицао на свијет програмирања. Улога човјека у појединим задацима се смањује, док AI алати све чешће преузимају дио процеса. Индустријске примјене су многоструке, међутим природно се намеће и питање улоге ових алата у едукативном процесу. Ово питање је посебно важно и још увијек нема устаљених образаца на који начин ученици и студенти треба да користе помоћ вјештачке интелигенције, посебно ChatGPT-а као тренутно најпопуларнијег модела. Циљ овог рада јесте да пружи управо један такав образац који би требао да олакша и убрза процес учења новог програмског језика.

Оно што је посебно важно одмах нагласити јесте да ChatGPT треба посматрати искључиво као персоналног асистента. Он није и не може бити замјена људском фактору. Разлог за то није само етичке природе, већ чињеница да ChatGPT не нуди 100% исправна рјешења. Наивна, copy-paste употреба привремено даје чак и значајно боље резултате, но то је само привид [1]. Дугорочно, корисник тим приступом не само да не усваја довољну количину знања већ и значајно лимитира своје способности критичког размишљања. Осим тога неконтролисана и погрешна употреба ChatGPT-а и сличних алата повећава ризик од плагирања и преписивања, што за собом повлачи низ других проблема.

Са друге стране, јасно је да ChatGPT има моћне функционалности које се могу искористити и у процесу учења. Једна од предности је интерактивност коју нуди и висока прецизност рада са чињеницама с обзиром на то да је трениран на огромним скуповима података. Корисник може добити одговор на свако питање, постављати потпитања и усмјеравати комуникацију. Модел учења који представљамо ослања се управо на такав, дијалошки приступ, уз пажљиво одабрана питања и критичко тумачење одговора.

Иако учење новог програмског језика није једнако тешко за искусне програмере и почетнике, постоје области које сви морају савладати: лексика, синтакса и семантика. На питања о лексици и синтакси ChatGPT углавном пружа коректне одговоре, иако постоји одређен ризик од полутачних или чак и потпуно погрешних одговора. Питања везана за семантику су већ значајно тежа за AI и захтјевају дубље промишљање и логичко разумијевање. Оно гдје се ChatGPT показао корисним јесте приликом издвајања неких канонских грешака, гдје пружа релативно добро структуиран и детаљно закоментарисан код, те може сугерисати употребу ефикаснијих алгоритама и бољих структура података. Детаљније о предностима и манама из искуства студената по питању учења програмирања уз помоћ ChatGPT-а можете наћи у [2].

Кључне речи: програмски језици, ChatGPT, интерактивно учење

Библиографија

[1] **Gökhan Akçapınar, Elif Sidan.** AI chatbots in programming education: guiding success or encouraging plagiarism *Discover Artificial Intelligence*, (2024).

[2] **Kehinde Aruleba, Ismaila Temitayo Sanusi, George Obaido, Blessing Ogbuokiri.** Integrating ChatGPT in a Computer Science Course: Students Perceptions and Suggestions. *arXiv preprint* arXiv:2402.01640 (2024).

Интерактивна лексичка и синтаксна анализа кратких текстова на српском језику

Лазар Васовић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд
e-mail: pd212006@alas.matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0005-9231-3198

Апстракт. Лексичка анализа представља процес идентификовања основних језичких јединица, док синтаксна анализа одређује њихове међусобне односе у оквиру реченице природног језика. У раду је представљен интерактивни систем за лексичку и синтаксну анализу кратких текстова на српском језику, заснован на комбинацији језичких правила и статистичких метода. Програм омогућава унос текста путем једноставног корисничког интерфејса, након чега аутоматски сегментише речи, препознаје њихову врсту и друге граматичке категорије (нпр. падеж, род, број, основни облик и слично), а напослетку хијерархијски структурира реченичне елементе. Посебан акценат стављен је на визуелни приказ и интерактивност, па су кориснику омогућени детаљни преглед, испитивање, као и евентуална исправка резултата анализе. Резултати показују да систем успешно обрађује кратке текстове различите сложености и пружа поуздану основу за даљу семантичку анализу или примену у образовним и истраживачким окружењима. Програм је конкретну примену нашао као помоћни алат у реализацији једног студијско-истраживачког рада на Филолошком факултету Универзитета у Београду.

Кључне речи: обрада природних језика; српски језик; лексичка анализа; синтаксна анализа.

Модификација теста једнакости регресионоих кривих на циркуларним подацима

Дуња Прокић

Математички факултет, Универзитет у Београду, Студентски трг 16, Београд, Србија
Факултет организационих наука, Универзитет у Београду, Јове Илића 154, Београд, Србија
e-mail: dunja.prokic@fon.bg.ac.rs

Апстракт. Посебан изазов представља моделовање односа између линеарних и циркуларних променљивих, када је циљ истраживања да се квантификује специфичан образац зависности који није могуће адекватно описати стандардним линеарним техникама. У оквиру предавања биће представљен тест једнакости регресионих кривих у линеарно-циркуларном случају из рада [1], као и модификација предложене тест статистике прилагођена небалансираним подацима. Емпиријска анализа и симулациони експерименти показују понашање, моћ и робусност тестова у различитим условима, уз њихово међусобно поређење ради процене релативне ефикасности.

Кључне речи: циркуларни подаци; циркуларна регресија; непараметарски тестови; $ANCOVA$ тестови.

Библиографија

[1] **Alonso-Pena, M. and Ameijeiras-Alonso, J. and Crujeiras, R. M.** Nonparametric tests for circular regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2021, 91, 477–500.

[2] **Di Marzio, M. and Panzera, A. and Taylor, C. C.** Non-parametric regression for circular responses. *Scandinavian Journal of Statistics*, 2013, 40, 238–255.

Proveravanje modela kvantnih programa korišćenjem kvantnih Markovljevih lanaca

Uroš Ševkušić

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 16, Beograd
e-mail: pd242007@alas.matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0009-9291-4232

Apstrakt. U modelovanju i verifikaciji softvera čije ponašanje zavisi od slučajnih događaja, koriste se teorija Markovljevih lanaca i logički jezik PCTL (Probabilistic CTL), koji predstavlja ekstenziju logičkog jezika CTL (Computational Tree Logic), koji se koristi u poznatim alatima za proveravanje modela kao što su **NuSMV** [1]. Za potrebe modelovanja i verifikacije kvantnih algoritama i protokola, u radu [2] su prikazani kvantni Markovljevi lanci i logički jezik QCTL (Quantum CTL). Takođe je definisana nadoperatorska mera kao kvantni ekvivalent verovatnosne mere, a potom su postojeće tehnike za proveravanje ispravnosti iskaza u jeziku PCTL adaptirane i prevedene u algoritam za proveravanje isparavnosti iskaza u jeziku QCTL. Opisane tehnike su implementirane u alatu **IscasMC** [3].

U okviru ovog izlaganja biće prikazane teorijske osnovne kvantnih Markovljevih lanaca, algoritmi za proveravanje ispravnosti QCTL formula, kao i primene tih tehnika na postojećim kvantnim algoritmima. Biće prikazano kako se može proveriti ispravnost Groverovog algoritma pretrage [4] pomoću kvantnih Markovljevih lanaca. Groverov algoritam pretrage je kvantni algoritam za nalaženje elementa u nizu koji ispunjava neki uslov i radi u vremenu $O(\sqrt{N})$, gde je N dužina niza, pod pretpostavkom da je kvantno kolo koje određuje da li element zadovoljava uslov pretrage dato kao crna kutija na početku.

Ključne reči: kvantni Markovljevi lanci; QCTL; kvantno računarstvo; proveravanje modela; nadoperatorska mera

Bibliografija

[1] Christel Baier and Joost-Pieter Katoen. *Principles of Model Checking (Representation and Mind Series)*. The MIT Press, 2008.

[2] Yuan Feng, Nengkun Yu, and Mingsheng Ying. Model checking quantum markov chains. *Journal of Computer and System Sciences*, 79(7):1181–1198, 2013.

[3] IscasMC for Quantum Markov Chains Download Page: https://tis.ios.ac.cn/tool/qmc/.

[4] Lov K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *In Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '96, page 212–219, New York, NY, USA, 1996. Association for Computing Machinery.

Radionice kreativne matematike

Aleksandar Simić

Prirodno-matematički fakultet Novi Sad
e-mail: acasimic333@gmail.com
ORCID: 0009-0000-9123-001X

Apstrakt. Na ovom predavanju ćemo pokazati kako se matematika može učiti na kreativan i zabavan način kroz organizovanje radionica koje mogu u celini ili delovima biti korišćene i kao aktivnost na redovnom času.

Kroz radionicu Matematičke igre i strategije učenicima se približavaju takmičarski zadaci, a same naučene strategije učenici mogu primeniti i kasnije prilikom pokretanja sopstvenog biznisa za analizu poteza konkurencije i za pronalazak adekvatnog odgovora. Učenici dobijaju bombone i 5 matematičkih igara. Potrebno je da kroz igru bombonama otkriju koji od dva igrača ima pobedničku strategiju u svakoj igri.

Radionica matematička bojanka približava učenicima teoriju grafova i kroz teoremu o četiri boje pokazuje zašto nauci ne treba verovati zdravo za gotovo, čime se učenici uče kritičkom razmišljanju. Učenici dobijaju neme karte nekog kontinenta i graf koji ih predstavlja. Potrebno je da ih oboje sa 4 boje, tako da svaka dva čvora grafa povezana istom granom ne budu obojena istom bojom, a na karti dve države koje se graniče budu obojene različitim bojama. Na kraju se učenici upoznaju sa samom teoremom kroz kratko predavanje.

Na radionici matematika i moda učenici uče osnovna pravilia kombinatorike kroz sastavljanje odevnih kombinacija od sličica odevnih predmeta. Učenici dobijaju radne listove sa odevnim predmetima koje treba da iseku i zatim pomoću njih da reše zadatke iz kombinatorike sa radnog lista. Time učenici primenjujući matematiku uče kako da iskoriste odevne predmete na što bolji način. Kroz ovu radionicu učenici se uče i finansijskoj pismenosti, koja je u današnje vreme veoma važna. Ovo predavanje je zasnovano na radionicama koje sam držao u Naučnom klubovima u Beogradu i Novom Sadu(u okviru festivala maj mesec matematike) i Osnovnoj školi „Jovan Grčić Milenko“ u Beočinu.

Dodatna inspiracija za aktivnosti potekla je iz edukativnih materijala koje autor već duže vreme objavljuje na Instagram profilu @aca.matematicar, sa ciljem popularizacije matematike i približavanja matematičkih ideja široj publici.

Radionica matematičke igre i strategije je realizovana sa učenicima sedmog i osmog razreda osnovne škole, a ostale dve sa učenicima drugog razreda srednje škole.

Cilj predavanja je da pokažemo uspešne načine za popularizaciju matematike i inspirišemo kolege da urade slične aktivnosti, kao i da ukažemo na važnost osamrevenjivanja metoda nastave.

Ključne reči: kombinatorika; matematičke igre; teorija grafova; metodika matematike; matematičke radionice.

Bibliografija

[1] **R. Tošić.** Matematičke igre Agencija Valjevac, Valjevo, 1999.
[2] **P. Mladenović.** Kombinatorika. Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2001.
[3] **D. Cvetković.** Teorija grafova i njene primene. Naučna knjiga, Beograd, 1986.

Morfologija galaksija u kosmološkoj simulaciji IllustrisTNG: Novi prag klasifikacije i reprodukcija morfologija-gustina relacije

Katarina Baucalo

Katedra za astronomiju, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: kataarina981@gmail.com
ORCID: 0009-0008-0713-9511

Ana Mitrašinović

Astronomska opservatorija u Beogradu
e-mail: amitrasinovic@aob.rs
ORCID: 0000-0002-7290-1348

Apstrakt. Kosmološke simulacije, poput IllustrisTNG, predstavljaju idealan alat za povezivanje teorijskih modela i astronomskih posmatranja. Međutim, morfološka klasifikacija u simulacijama često zahteva složene i računarski skupe metode kao što su višekomponentne kinematičke analize ili generisanje i obradu sintetičkih posmatranja. Samim tim, ovakve metode su često ograničene na male poduzorke, što značajno umanjuje njihovu upotrebljivost za šira statistička istraživanja. U ovom radu istražujemo da li se jednostavan i javno dostupan katalog *"Stellar Circularities, Angular Momenta, Axis Ratios"* može iskoristiti kao dovoljno pouzdan i efikasan alat za grubu morfološku klasifikaciju galaksija. Ovaj katalog daje informacije o udelima diska i ovala zvezdane komponente. Najpre, u okviru TNG50 simulacione kutije, vršimo validaciju parametara iz pomenutog kataloga cirkularnosti poređenjem sa detaljnijom petokomponentnom kinematičkom dekompozicijom iz drugog kataloga. Nalazimo da udeo ovala iz kataloga cirkularnosti najbolje opisuje ukupnu sfernu komponentu, dok udeo diska zapravo odgovara tankom disku, i često potcenjuje stvarni ukupni udeo diska. Razumevanjem parametara iz kataloga cirkularnosti, prelazimo na analizu TNG100 simulacione kutije na crvenom pomaku $z = 0$, odnosno u današnjem Univerzumu. Na osnovu distribucije udela diska $\mathrm{F_{disk}}$ za galaksije u opsegu masa $10 \leqslant \log(M_\star/\mathrm{M_\odot}) \leqslant 12$ identifikujemo prag za klasifikaciju galaksija na rane i kasne tipove (odnosno, na eliptične i diskolike galaksije, respektivno), koji iznosi $\mathrm{F_{disk}} = 0.25$. Ovaj prag je niži od uobičajeno korišćenog $\mathrm{F_{disk}} = 0.4$ i bolje obuhvata galaksije kasnog tipa sa umereno izraženim diskovima, koje bi prema višem pragu bile pogrešno svrstane u rane tipove. Dodatno, definišemo i treću, odnosno nepravilnu/kompleksnu klasu galaksija, kod kojih je zbir poznatih udela značajno manji od jedinice. Kao ključni test našeg pristupa, ispitujemo da li ova jednostavna klasifikacija može reprodukovati poznatu morfologija–gustina relaciju deleći okruženje u kojem se galaksije nalaze na polje, grupe i jata. Uočavamo jasan i očekivan trend koji se poklapa sa posmatranjima: kasni tipovi galaksija su dominantni u retkim sredinama, dok su rani i nepravilni tipovi dominantni u gušćim sredinama. Iako preliminaran rezultat, ovo predstavlja dokaz da je naša jednostavna klasifikacija dovoljno pouzdana.

Ključne reči: galaksije; kinematika; IllustrisTNG; morfologija; klasifikacija.

Bibliografija

[1] **Pillepich A., et al.** Simulating galaxy formation with the IllustrisTNG model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2018, 473, 4077–4106.

[2] **Genel S., et al.** Galactic Angular Momentum in the Illustris Simulation: Feedback and the Hubble Sequence. *The Astrophysical Journal Letters*, 2015, 804(2), L40, 7 pp.

[3] **Zana, T., et al.** Morphological decomposition of TNG50 galaxies: methodology and catalogue. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, 515(1), 1524—1543.

[4] **Dressler, A.** Galaxy morphology in rich clusters: implications for the formation and evolution of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 1980, 236, 351—365.

[5] **Baucalo, K. & Mitrašinović, A.** Galaxy morphology classification: Are stellar circularities enough? *Serbian Astronomical Journal*, 2025, 210, 61–71.

Poređenje metaheuristika u optimizaciji dozne raspodele za simulacije zračenja karcinoma oka

Aleksandar Todorović

Računarski fakultet, Univerzitet Union, Kneza Mihaila 6/VI, Beograd
Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Studentski trg 12-16, Beograd
e-mail: aleksandar.todorovic05@gmail.com
ORCID: 0009-0004-0054-0784

Apstrakt. Precizno planiranje radioterapije zračenja tumora zahteva određivanje parametara koji utiču na apsorbovanu dozu zračenja u tumoru i okolnim tkivima. Ručno pronalaženje i podešavanje ovih parametara je često vrlo sporo i ne dovodi do zadovoljavajućih rešenja, zato su u relevantnoj literaturi korišćene metaheurističke metode za optimizaciju. Kao primer navodimo genetski algoritam (Genetic Algorithm, GA) [1] i optimizacija kolonijom čestica (Particle Swarm Optimization, PSO) [2]. U ovom radu primenjene su tri metaheurističke metode i to, GA, PSO i tabu pretraživanje (Tabu Search, TS), sa ciljem da se što efikasnije i automatizovano pronađu pet ključnih ulaznih parametara [3] u Monte Carlo simulacijama FOTELP-VOX programa za simuliranje zračenja karcinoma oka [4]. Korišćena mera kvaliteta radioterapije predstavlja odstupanje dobijene doze raspodele zračenja od preporučene.

Dobijeni rezultati ukazuju da se korišćenjem PSO algoritma dostiže najmanja apsolutna razlika između preporučene doze i dobijene doze u najkraćem mogućem periodu. TS algoritam postiže rezultate bliske PSO-u uz stabilniju konvergenciju parametara, ali zahteva duže vreme izvršavanja. GA postiže najlošije rezultate među ispitivanim metaheurstičkim metodama. Sve tri metode značajno nadmašuju analitičko traženje parametara i ručno pokretanje simulacija, i vremenski (naročito zbog mogućnosti paralelizacije) i po dobijenoj grešci.

Rezultati su dobijeni tokom letnje istraživačke prakse u Matematičkom institutu SANU, pod mentorstvom Milene Živković, Filipa Andrića, Tatjane Davidović i Dragutina Ostojića.

Ključne reči: Monte Karlo simulacije; optimizacija parametara; genetski algoritam; tabu pretraga; optimizacija kolonijom čestica.

Bibliografija

[1] **D. Petrovic, M. Morshed, S. Petrovic** Multi-objective genetic algorithms for scheduling of radiotherapy treatments for categorised cancer patients. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38, 6994-7002.

[2] **G. Yang, W. Li, W. Xie, L. Wang, K. Yu** An improved binary particle swarm optimization algorithm for clinical cancer biomarker identification in microarray data. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2024, 244, 107987:1-17.

[3] **V.T. Taasti, L. Hong, J.S.A. Shim, J.O. Deasy, M. Zarepisheh** Automating proton treatment planning with beam angle selection using Bayesian optimization. *Medical Physics*, 2020, 47, 3286-3296.

[4] **M Zivkovic, F. Andric, M. Svicevic, D. Krstic, L. Krstic, B. Pirkovic, T. Miladinovic, M.E.A. Aichouche** FOTELP-VOX-OA: Enhancing radiotherapy planning precision with particle transport simulations and Optimization Algorithms. *Computer methods and programs in biomedicine*, 2025, 268, 108838:1-15.

Prostorni analogon Ferma Toričelijeve tačke i Grebnerove baze

Aleksandra Rosić

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
Studentski trg 16, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: aleksandra.s.rosic@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4878-4292

Branko Malešević

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: branko.malesevic@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-4963-4149

Miloš Mićović

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: milos.micovic@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0008-2105-9104

Bojana Mihailović

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: mihailovicb@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-9773-8156

Apstrakt. U ovom radu određuje se pozicija tačke M u prostoru iz koje se tri tačke A, B, C u jednoj ravni vide pod istim uglom. Takve tačke, ako postoje, nalaze se u preseku tri torusa. U radu će se pokazati da se koordinate takvih tačaka mogu odrediti rešavanjem tri odgovarajuće algebarske jednačine sa tri promenljive. Rešivost sistema takvih algebarskih jednačina se razmatra primenom Grebnerovih baza [1]. Specijalno, ukoliko je takva tačka M u ravni trougla ABC, dobijamo jedan način određivanja Ferma Toričelijeva tačke [2,3].

Ključne reči: Ferma Toričelijeva tačka; Grebnerove baze; torusi; vizuelizacija.

Bibliografija

[1] **D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea.** Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer Cham, 2025.
[2] **H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer**. Geometry Revisited. Mathematical Association of America, 1967.
[3] **B.J. McCartin**. Mysteries of the Equilateral Triangle. Hikari Ltd, 2010.

Jedan sistem za automatsko dokazivanje polinomskih nejednakosti

Miloš Mićović

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: milos.micovic@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0008-2105-9104

Branko Malešević

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: branko.malesevic@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0002-4963-4149

Bojana Mihailović

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: mihailovicb@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-9773-8156

Tatjana Lutovac

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija
e-mail: tlutovac@etf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0003-2138-6400

Apstrakt. U ovom radu je data jedna internet aplikacija za automatsko dokazivanje polinomskih nejednakosti. Serverska strana aplikacije je implementirana u programskom jeziku Python korišćenjem biblioteke SymPy [1], dok je klijentska strana aplikacije realizovana korišćenjem radnog okvira Angular. Komunikacija između klijentske i serverske strane aplikacije je ostvarena primenom radnog okvira Flask. Korisnik unosi polinomsku nejednakost i interval nad kojim se zadata nejednakost dokazuje. Sistem prvo testira da li nejednakost važi u određenim diskretnim tačkama zadatog intervala. Ukoliko se pronađe neka tačka u kojoj zadata nejednakost ne važi, korisnik dobija obaveštenje da postoji kontraprimer. Ako nije pronađen kontraprimer, sistem pokušava da dokaže nejedakost primenom Šturmove teoreme [2,3] i pri tome se ispisuje detaljno ceo postupak dokazivanja. U radu je opisana i primena sistema u dokazivanju miksovano trigonometrijsko polinomskih i miksovano eksponencijalno polinomskih nejednakosti jer se, prema [4,5], dokazivanje nejednakosti iz ovih klasa nad realnim konačnim intervalima može svesti na dokazivanje polinomskih nejednakosti.

Ključne reči: Šturmova teorema; polinomske nejednakosti; automatsko dokazivanje nejednakosti; veštačka inteligencija.

Bibliografija

[1] **A. Meurer, C. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S.B. Kirpichev, M. Rocklin, et al.** SymPy: symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, 2017, 3, p. e103.

[2] **J.C.F. Sturm.** Mémoire sur la résolution des équations numériques. *Bulletin des Sciences de Férussac*, 1829, 11, 419–425.

[3] **N. Cutland**. Computability: An Introduction to Recursive Function Theory. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.

[4] **B. Malešević, M. Makragić.** A Method for Proving Some Inequalities on Mixed Trigonometric Polynomial Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2016, 10, 849–876.

[5] **B. Malešević, M. Mićović.** Exponential Polynomials and Stratification in the Theory of Analytic Inequalities. *Journal Of Science and Arts*, 2023, 23, 659–670.

Odabir lokacije studentskog stana primenom integrisanog DEA-MACBETH-OPA pristupa

Ilija Ivezić

Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka
e-mail: ilija777ivezic@gmail.com
ORCID: 0009-0004-1981-1249

Bisera Andrić Gušavac

Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka
e-mail: bisera.andric.gusavac@fon.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-9438-5906

Apstrakt. Rad se bavi problemom odabira lokacije studentskog stana primenom integrisanog višekriterijumskog pristupa koji kombinuje metode DEA (Data Envelopment Analysis), MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) i OPA (Ordinal Priority Approach). Cilj istraživanja je da se razvije sveobuhvatan metodološki okvir koji omogućava objektivno i racionalno donošenje odluka u složenim uslovima, gde su prisutni i kvantitativni i kvalitativni kriterijumi. DEA metoda omogućava procenu relativne efikasnosti alternativa, MACBETH transformiše verbalne ocene eksperata u numeričke vrednosti atraktivnosti, dok OPA metod omogućava određivanje težina na osnovu ordinalnih preferencija. Na primeru odabira studentskog stana na opštini Voždovac, primenjeni integrisani model omogućava rangiranje alternativnih lokacija prema više kriterijuma kao što su cena zakupa, udaljenost od fakulteta, dostupnost javnog prevoza, površina i kvalitet stanovanja. Rezultati istraživanja potvrđuju da kombinacija kvantitativnih i kvalitativnih pristupa značajno povećava pouzdanost odluke i doprinosi boljem razumevanju faktora koji utiču na izbor stambene lokacije kod studentske populacije. Dobijeni model može imati širu primenu u urbanističkom planiranju, obrazovnim institucijama i tržišnim analizama nekretnina.

Ključne reči: lokacijski problemi, DEA metoda, MACBETH metoda, OPA metoda, višekriterijumsko odlučivanje.

Digitalni alati u nastavi matematike – didaktički potencijal GeoGebre

Marko Ošap
Pedagoški fakultet u Somboru, Srbija
e-mail: osapbbb@gmail.co
ORCID: —

Marijana Gorjanac Ranitović
Pedagoški fakultet u Somboru, Srbija
e-mail: pef.mgranitovic@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6811-4993

Apstrakt. Cilj ovog rada je da prikaže mogućnosti primene softverskog alata GeoGebra u savremenoj nastavi matematike, sa posebnim naglaskom na geometriju i didaktički potencijal. U prvom delu rada dat je istorijski pregled razvoja matematike: od praistorijskih korena, preko civilizacija Mesopotamije i Egipta, do antičke Grčke, sa posebnim osvrtom na doprinos Talesa iz Mileta. Drugo poglavlje primarno predstavlja pregled dosadašnjih istraživanja, čija tematika je u korelaciji sa temom ovog rada. Treće poglavlje donosi detaljan opis funkcionalnosti GeoGebre, uključujući alate za konstrukciju i analizu, kao i mogućnosti GeoGebra učionice i GeoGebra ispita, koji omogućavaju interaktivno učenje i formativno praćenje napretka učenika. U četvrtom poglavlju prikazan je didaktički potencijal GeoGebre kroz niz dinamičkih apleta izraženih na srpskom jeziku, namenjenih vizuelizaciji osnovnih geometrijskih pojmova i ilustraciji Talesovih teorema. Poseban segment posvećen je prikazu primene GeoGebre u mlađim razredima osnovne škole. Rad time ukazuje na značaj integracije digitalnih alata u nastavni proces i potvrđuje da GeoGebra može predstavljati snažan resurs u modernizaciji i unapređenju nastave matematike.

Ključne reči: GeoGebra; nastava matematike; Talesove teoreme; digitalne tehnologije u obrazovanju.

Solving the Obnoxious p-median Problem by the Particle Swarm Optimization Method

Damjan Stanković

Faculty of Mathmatics, University of Belgrade
e-mail: damjan.stankovic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0009-0005-8444-5406

Abstract. In this paper the Particle Swarm Optimization (PSO) method is implemented to solve the Obnoxious p-median problem (Op-med). The goal of the Op-med problem is to find locations of p centers such that the sum of the distances from the users to their closest centers is maximized. In order to improve the basic PSO, two new ideas are introduced: adding random matrices which additionally diversify the exploration of the solution space, as well as an exploitation loop. Adding the random matrices adds to the diversification of the solution by randomizing the social and cognitive aspect of the method. The exploitation loop explores the region identified as the best in detail with a PSO method that doesn't have a social aspect. Testing was done on modified pmed instances from the ORLIB library, which include up to 200 nodes, and the results of the proposed method are compared to ones obtained by the CPLEX solver. The paper additional explores the behavior of the method when the swarm is enlarged, as well as when more PSO iterations are added. Testing has shown that a larger swarm gives much better improvements than adding additional iterations.

Keywords: combinatorial optimization, particle swarm optimization method, the obnoxious p-median problem.

References

[1] **S.B. Welch and S. Salhi.** The obnoxious p facility network location problem with facility interaction. In: *European Journal of Operational Research*, 102:302–319, 1997.

[2] **Labbé et al.** Obnoxious p-Median problems: valid inequalities and a Branch-and-Cut approach, ORP^3, Paris, 2001.

[3] **Lin Chang-Chun, Chiang Yen-I,** Alternative formulations for the obnoxious p-median problem, In: *Discrete Applied Mathematics*, 289, 366-373, 2021.

[4] **Kennedy, J.; Eberhart, R.** "Particle Swarm Optimization". *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks.* Vol. IV. pp. 1942–1948. 1995.

[5] **W. T. Li, X. W. Shi,** An improved Particle Swarm Algorithm for pattern synthesis of phased systems, *Progress In Electromagnetics Research, PIER 82,* 319–332, 2008.

Application of the bisection method in solving nonlinear equations in mathematics and physics

Milica Mirić

International Burch University
Francuske revolucije bb, Ilidža 71210, Sarajevo
Bosnia and Herzegovina
e-mail: milica.miric@ibu.edu.ba
ORCID: 0009-0002-4378-2877

Dajana Kulić

University of East Sarajevo, Faculty of Production and Management,
Vojvode Stepe Stepanovića bb, 89101 Trebinje
Bosnia and Herzegovina
e-mail: dajana.zelenkovic@fpm.ues.rs.ba
ORCID: 0009-0006-1566-0396

Abstract. The problem of solving nonlinear equations, whether algebraic or transcendental, is one of the fundamental problems in numerical analysis. This problem involves finding the roots of a continuous function, i.e. the intersections of the graph of a function with the x-axis. In this paper, we will focus only on finding the real roots of a function. Among the methods for solving nonlinear equations, the bisection method, based on the Intermediate Value Theorem, has been chosen. In this paper, we will present examples of the application of the bisection method in solving algebraic and transcendental equations, then in solving the problem of black-body radiation and in solving the problem of the motion of point-like particles.

Keywords: bisection method; nonlinear equations; black-body radiation; particle-like objests.

Comparative Analysis and Evaluation of Method Layout Algorithms

Miloje Joksimović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: miloje.joksimovic@matf.bg.ac.rs

Marko Spasić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
e-mail: marko.spasic@matf.bg.ac.rs

Milena Vujošević Janičić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Oracle Labs, Belgrade
e-mail: milena.vujosevic.janicic@matf.bg.ac.rs
ORCID: 0000-0001-5396-0644

Abstract. *GraalVM* [1, 2] is a high-performance runtime that supports ahead-of-time (AOT) compilation through its Native Image technology, enabling Java applications to be transformed into compact, standalone executables with fast startup and reduced memory usage [3]. As part of the AOT pipeline, the compiler determines the layout of methods inside the final executable. The order in which methods are placed in the *.text* section affects spatial locality and consequently impacts memory footprint, TLB efficiency, and the frequency of page faults. Modern compilers employ heuristics and profile-guided optimizations (PGO) to arrange methods in a way that improves locality and overall execution efficiency, making method layout an important factor in runtime performance, especially for memory-constrained or latency-sensitive workloads.

This work analyzes, compares, and extends several method layout algorithms implemented in the GraalVM Native Image compiler. We evaluate heuristic-based, profile-driven, and randomized approaches across a representative benchmark suite and investigate their impact on memory footprint and startup performance [4]. To enable fine-grained evaluation, we introduce extended measurement support that reports memory usage of the *.text* section [4]. The results highlight the performance sensitivity to method ordering and provide a deeper understanding of how code layout influences native executable characteristics. The contributions include a clarified and simplified view of existing layout strategies, new measurement capabilities, and a comprehensive comparison that lays the groundwork for further research on code layout optimization in AOT compilers.

Keywords: GraalVM; profile-guided optimization; Java; method layout; performance optimization.

References

[1] **T. Würthinger, et al.** One VM to Rule Them All. In: *Proceedings of Onward!*, 2013.
[2] **Oracle.** GraalVM. *Available at:* `https://www.graalvm.org/`
[3] **C. Wimmer, C. Stancu, P. Hofer, V. Jovanovic, P. Wögerer, P. B. Kessler, O. Pliss, T. Würthinger.** Initialize once, start fast: application initialization at build time. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, 2019, 3(OOPSLA).
[4] **Miloje Joksimović.** *Komparativna analiza i evaluacija algoritama raspoređivanja metoda programa u cilju optimizacije performansi.* Master's thesis. University of Belgrade, Faculty of Mathematics, 2025.

Spisak učesnika

Aksentijević, Aleksandar, 48
Aleksić, Danijel, 46
Aleksić, Suzana, 48
Alilović, Jasmina, 77
Andrić Gušavac, Bisera, 95
Apushkinskaya, Darya, 63
Aranđelović, Ivan , 55
Arsenović, Miloš, 51

Babović, Vesna, 74
Bakić, Radoš, 24
Baucalo, Katarina, 91
Bogachev, Vladimir, 51
Božić, Radoslav, 66

Dabetić, Slavica, 79
Damljanović, Nada, 73
Danilović, Aleksandra, 76
Dedeić, Jovana, 26
Delić, Marija, 26
Desyatka, Victoria, 13, 44
Djukić, Marija, 73
Djurčić, Dragan, 73
Dragović, Vladimir, 10, 12

Elez, Nebojša, 40

Fatić, Danica, 73
Filipović, Nenad, 73

Gajić, Borislav, 12
Gajić, Jelena, 60
Gazca Orozco, Pablo Alexei, 29
Glišić, Mirjana, 78
Gmeineder, Franz, 29
Golubović, Zora, 45
Gorjanac Ranitović, Marijana, 96
Grujin, Milan, 68

Hamza, Alma, 62

Ikodinović, Nebojša, 65
Ilkevych, Natalya, 41
Ivanov, Stefan, 16
Ivetić, Jelena, 26
Ivezić, Ilija, 95
Ivkovć, Stefan, 34

Jaguzović, Vladan, 33
Jakšić, Smiljana, 59
Jaćimović, Milojica, 32
Jevtić, Filip D, 30
Joksimović, Miloje, 99

Jovanović, Božidar, 11, 12

Kalaj, David, 28
Karapetyants, Alexey, 53
Karličić, Milica, 37
Katić, Mirjana, 81
Kenić, Jelena, 78
Knežević, Miljan, 17
Kovba, Zarina, 43
Krstić, Mihailo, 51
Kulić, Dajana, 98

Lekić, Vučelja, 73
Limonchenko, Ivan, 47
Lipkovski, Aleksandar, 21
Liđan, Edin, 71
Lukić, Katarina, 23
Lutovac, Tatjana, 94

Malešević, Branko, 93, 94
Maringová-Kokavcová, Erika, 29
Marić, Filip, 84
Marković, Marijan, 52
Marković, Vladimir, 49
Mateljević, Miodrag, 38, 54, 82
Matić, Bojana, 81
Melentijević, Petar, 33
Mihailović, Bojana, 93, 94
Mijajlović, Nevena, 32
Milanović, Božidar, 68
Milenković, Aleksandar, 69
Milenković, Stefan, 36
Milićević, Srđan, 26
Milosavljević, Aleksandra S, 57
Milosavljević, Nataša, 72
Milošević, Bojana, 61, 62
Milošević, Dušan, 75
Milošević, Mimica, 75
Mirić, Milica, 98
Mitrašinović, Ana, 91
Mićović, Miloš, 93, 94
Mišković, Dušan, 83
Mišković, Tamara, 83

Nazarov, Alexander, 63

Ošap, Marko, 96

Pavlović, Katarina, 73
Pavlović, Miloš, 86
Pavlović, Vladimir, 72
Petrović, Miloš Z, 20

Pilipović, Stevan, 48
Popelensky, Theodore, 15
Popivoda, Goran, 39
Popović, Stefan, 75
Prokić, Dunja, 88
Purtić, Bojana, 54

Radičić, Biljana, 25
Radojević, Jelena, 61
Rakić, Zoran, 14
Ristović, Ivan, 35, 37
Romash, Denys, 41
Rosić, Aleksandra, 93

Savatović, Milica, 22
Sevost'yanov, Evgeny, 13, 41–44
Sifaleras, Angelo, 27
Simić Milivojević, Anđelka, 67
Simić, Aleksandar, 90
Smirnova, Irina, 53
Spasić, Marko, 99
Stanić, Marija P, 57
Stanišev, Ivana, 58
Stankov, Dragan, 31
Stanković, Damjan, 97
Stanković, Jelena, 56
Stanković, Tatjana, 71, 79
Stefanović, Aleksandar, 35
Stojanović Đurđević, Sana, 80, 84, 86
Stojičević, Dušan, 72
Svetlik, Marek, 17, 82
Svičević, Marina, 69

Taqbibt, Abdellah, 22
Targonskii, Valery, 42
Terzić, Svjetlana, 18
Todorović, Aleksandar, 92
Tomović Mladenović, Tatjana V, 57
Tscherpel, Tabea, 29

Urošević, Andrija, 80, 84
Utješinović, Danica, 77

Vasović, Lazar, 87
Vidojević, Katarina, 26
Višnjić, Jelena, 58
Vlahović, Branislav, 72
Vujadinović, Jasmina, 22
Vujošević Janičić, Milena, 35–37, 99
Vukmirović, Srdjan, 19
Vuković, Duša, 64
Vurdelja, Dejan, 70
Vučićević, Nemanja, 69

Zajmović, Ajlan, 32

Čugurović, Milan, 36
Đorđević, Bogdan, 45
Đukić Popović, Sonja, 75
Đurčić, Dragan, 40
Đurđević, Nataša, 85

Šarić, Dragomir, 50
Ševkušić, Uroš, 89